APPENDICE ALLE MEMORIE SULLA RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI

Giusto Bellavitis

APPENDICE

ALLE MEMORIE

SULLA RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI

1. Deggiono per certo ammirarsi quelle teorie matematiche che scoprono relazioni generalissime, cui talvolta sarebbe molto difficile verifirare, tanto smisurati sono i calcoli contenuti implicitamente nei simboli adoperati, nulladimeno sembrano da preferirsi quelle teorie, che nella scienza delle quantità hanno per iscopo di trovare le incognite relazioni, le quali più o meno frequentemente occorrono nelle moltiplici applicazioni delle matematiche; ed in ogni caso conducono a risultamenti, che possono verificarsi direttamente. Le principali questioni di questa parte più utile dell' algebra sono nella ricerca delle quantità la risoluzione delle equazioni, e nella ricerca delle funzioni l'integrazione delle equazioni differenziali. Quella fu la prima questione trattata nell' algebra, ma valse a deviare dalla strada migliore la pretesa di risolverla con mezzi affatto insufficienti ed inopportuni. Forse pel primo il Vieta riconobbe occorrere l' invenzione di una speciale operazione aritmetica per risolvere le equazioni complicate, come erano state necessarie speciali operazioni per risolvere le $ax = b$, $x^n = c$; ma le mirabili scoperte dei matematici italiani del secolo XVI aveano fatto nascere la speranza che la divisione e l' estrazione di radice potessero servire alla risoluzione delle equazioni, e così una ricerca infruttuosa distolse dal trovare la facile operazione aritmetira, che molto meglio delle formule algebriche poteva servire alla risoluzioue d' ogni equazione. Si noti, che se vi è qualche vantaggio nell' estrazione delle radici in confronto della risoluzione delle equazioni, ciò è soltanto dopo la scoperta dei logaritmi; del resto la speciale operazione aritme-

tica è più comoda delle note formule per la risoluzione delle equazioni non solamente per quelle di 3.° o di 4.° grado, ma anche per quelle di 2.° grado, specialmente nel caso che tutti i coefficienti sieno dati in frazioni decimali. — In questa Appendice nuovamente espongo il processo di calcolo, da cui risulta nella maniera più diretta ed opportuna la dimostrazione delle proprietà fondamentali delle equazioni algebriche, ed annunzio (§ 9) il criterio già da me dimostrato per conoscere la mancanza di radici, il quale mi sembra più comodo dei molti proposti: particolarmente raccomando ai giovani studiosi il metodo del Weddle (§ 18) per fattori decimali, nel quale si possono comodamente adoperare (§ 24) i logaritmi, — quello dell' Horner (§ 27) per frazioni a parti aliquote, — i due modi con cui io adopero gli *indici* del Cauchy (§§ 50, 53, 54) e trovo le radici immaginarie delle equazioni algebriche sia per successive addizioni, sia per fattori, — e le considerazioni sugli immaginarii (§ 39) almeno per quei giovani che credono la ragione dover conservare il dominio nelle scienze matematiche: l' appendice termina secondo il solito con un elenco bibliografico e coll' indice.

2. I principii, su cui si fonda la quinta operazione aritmetica, che noi diremo *estrazione delle radici delle equazioni*, sono elementari e semplici più di quanto si sarebbe potuto immaginare, ed inoltre hanno il vantaggio di offrire direttamente dimostrazioni facilissime dei teoremi fondamentali della teoria delle equazioni; sicchè procede molto inopportunamente chi, dopo esposte le regole di quella operazione, conserva le antiche dimostrazioni di ciò che spontaneamente può dedursi dall' operazione stessa, dà regole per determinare dei confini, tra i quali stieno comprese tutte le radici, propone la sostituzione nelle funzioni derivate, espone processi particolari per trovare le radici intere, suggerisce l' uso dell' approssimazione Newtoniana quasi che essa non fosse compresa nella quinta operazione aritmetica, ecc. Di questa, come di ogni cosa spontanea a presentarsi, sarebbe difficile additare il primo scopritore: Ruffini diede il processo per calcolare il valore di un polinomio ed applicò l' operazione all'estrazione delle radici delle quantità; Budan espose l' operazione (§ 60 *e*), ma per la sola cifra 1, Horner (1819) (§ 60 *l*) diede l' operazione completa, che per qualche tempo rimase incognita sul continente.

3. L' *operazione* consiste in un processo di calcolo per dividere il primo membro della data equazione algebrica per $(x-a)$. Non si toglie alle conseguenze la loro piena generalità supponendo che l' equazione sia

$$(1) \quad Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \ ,$$

e che il primo membro diviso per $x-a$ dia il quoziente $Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3$ ed il residuo E_4, sicchè l'equazione sia

$$(2)\quad (Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3)(x-a)+E_4=0 \quad .$$

Il processo stesso della divisione è il modo più comodo per calcolare il valore E_4 di $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E$ posto sotto la forma

$$(3)\quad \{[(Aa+B)a+C]a+D\}a+E=E_4 \quad ,$$

essendo

$$(4)\quad aA+B=B_1\ ,\ aB_1+C=C_2\ ,\ aC_2+D=D_3\ ,\ aD_3+E=E_4 \quad .$$

Se supponiamo che $A=1$, che $-B_1$ sia la somma delle tre radici dell'equazione $x^3+B_1x^2+C_2x+D_3$, che C_2 sia la somma dei loro prodotti a 2 a 2, e che $-D_3$ ne sia il prodotto, le (4) mostrano che analoghi significati hanno le $-B$, C, $-D$, E, rispetto alle radici della (1); così di passo in passo partendo da un'equazione di primo grado $x-h=0$ si dimostrano le espressioni dei coefficienti in funzioni *simmetriche* delle radici. — La (2) rende palese che *se* a *è una radice dell'equazione* (1), cioè se $E_4=0$, *il suo primo membro è divisibile senza residuo per* $(x-a)$ *e viceversa.* Continuando la divisione del quoziente $Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3$ per $(x-a)$ si ha

$$Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3=(Ax^2+B_2x+C_3)(x-a)+D_4$$
$$Ax^2+B_2x+C_3=(Ax+B_3)(x-a)+C_4$$
$$Ax+B_3=A(x-a)+B_4$$

che sostituite nella (2) danno

$$(5)\quad A(x-a)^4+B_4(x-a)^3+C_4(x-a)^2+D_4(x-a)+E_4=0 \ ,$$

sicchè i coefficienti di questa trasformata in $(x-a)$ si ottengono col mezzo della *tabella* di calcolo

$$(6)\qquad \begin{array}{r|l} & A+B+C+D+E \\ \hline a & A+B_1+C_2+D_3+E_4 \\ & A+B_2+C_3+D_4 \\ & A+B_3+C_4 \\ & A+B_4 \end{array}$$

i cui termini sono calcolati mediante la *cifra* a colle relazioni (4) e colle altre analoghe

$$(7)\qquad \begin{array}{lll} aA+B_1=B_2 \;, & aB_2+C_2=C_3 \;, & aC_3+D_3=D_4 \;, \\ aA+B_2=B_3 \;, & aB_3+C_3=C_4 \;, & aA+B_3=B_4 \;. \end{array}$$

4. La (5) mostra che per un valore di x pochissimo differente da a il primo membro dell' equazione prende un valore quanto poco si voglia differente da E_4; perciò questa è una funzione continua della x, che procede senza alcuna interruzione, ne viene che: *Tra due valori della x, che danno al primo memero dell' equazione valori di segno opposto, esiste sempre almeno una radice dell' equazione.*

5. Considerando le serie di quantità ottenute successivamente mediante la *cifra positiva* a,

1.ª	$A\ B\ C\ D\ E$	6.ª	$A\ B_2\ C_2\ D_3\ E_4$
2.ª	$A\ B_1\ C\ D\ E$	7.ª	$A\ B_2\ C_3\ D_3\ E_4$
3.ª	$A\ B_1\ C_2\ D\ E$	8.ª	$A\ B_2\ C_3\ D_4\ E_4$
4.ª	$A\ B_1\ C_2\ D_3\ E$	9.ª	$A\ B_3\ C_3\ D_4\ E_4$
5.ª	$A\ B_1\ C_2\ D_3\ E_4$	10.ª	$A\ B_3\ C_4\ D_4\ E_4$
		11.ª	$A\ B_4\ C_4\ D_4\ E_4$

si scorge che dalla 4.ª alla 5.ª sparirà una *variazione* di segno nel caso che E ed E_4 abbiano segni opposti, giacchè $E_4=aD_3+E$ avrà necessariamente lo stesso segno di D_3: e che da ogni altra serie alla successiva o resterà invariato il numero di variazioni di segno o ne sparirà un pajo; infatti, se per esempio, B_3 D_4 abbiano lo stesso segno e C_3 $C_4=aB_3+C_3$ abbiano segni opposti, dalla serie 9.ª alla 10.ª spariranno due variazioni di segno. Viene da ciò l' importanza di fare attenzione al numero di variazioni di segno, che si perdono dai coefficienti dell' equazione (1) a quelli della sua trasformata (5) in $(x-a)$, giacchè il numero delle radici comprese nell' intervallo $x=0$ $x=a$ non potrà mai superare quello della perdita delle variazioni di segno. Questa osservazione che da prima era sfuggita al Budan, gli fece creder necessario di cercare se vi fossero radici anche in quegli intervalli, nei quali non era sparita alcuna variazione. Esaminiamo più attentamente come si cangi il numero di variazioni di segno. Possiamo supporre che sieno calcolate tutte le trasformate, nelle quali qualche termine si annulla, e sieno esse distribuite procedendo sempre da una alla successiva mediante cifre positive; per fissare le idee con un esempio si abbiano successivamente i segni qui apparenti

1) $+-+-+$	5) $+++--$
2) $+\ 0+-+$	6) $+++\ 0\ -$
3) $+++-+$	7) $++++-$
4) $+++-\ 0$	8) $++++\ 0$
	9) $+++++$

il valore 0 del secondn termine della 2) fa sparire dalla 1) alla 3) due variazioni di segno, altre due ne spariscono per le radici 4) 8), mentre il valor 0 della (6) non muta il numero delle variazinni. Quel valore che fa sparire insieme i due ultimi termini dicesi una radice doppia, ecc.; quel valore che fa sparire due variazioni di segno non riferibili all' ultimo termine dicesi un valor *critico*, similmente si hanno i valori critici doppii, che fanno sparire 4 variazioni di segno, ecc. — Il valor $x=0$ nell' equazione

$$x^8-x^5-x^3+x=0$$

è non solo *una radice* ma anche *un valor critico doppio*, poichè dalla trasformata precedente coi segni

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - & + & + & - \\ + & 0 & 0 & - & 0 & - & 0 & + & 0 \end{matrix}$$

alla successiva coi segni $+++----++$
vi è la perdita di 5 variazioni di segno. Questo esempio fa vedere come si debba regolarsi in ogni caso: ad ogni termine nullo devono darsi due segni in guisa che nella riga superiore vi sia il massimo numero di variazioni e nella inferiore il minimo numero possibile

$$+\substack{-\,+\\+\,+}-\substack{+\\-}-\substack{+\\-}+\substack{-\\+}\quad .$$

Sia proposta per secondo esempio la equazione $x^8+x^6-x^2=0$ scrivendone i segni così

$$+\substack{-\\+}+\substack{-\,+\,-\\+\,+\,+}-\substack{+\,-\\-\,-}$$

ci si palesa la perdita di $7-1=6$ variazioni, esse dipendono da ciò che $x=0$ è una *radice doppia* a motivo dell' annullarsi dei due ultimi termini, ed è un *valor critico doppio* a motivo dell' annullarsi del 2.° termine fra due termini x^8 x^6 di egual segno, e dell' annullarsi di tre termini contigui tra due x^6 $-x^2$ di segni opposti. — Osservando i segni

$$+\substack{-\,+\\+\,+}+\quad \text{oppure}\quad +\substack{-\,+\\+\,+}-$$

si scorge che l' annullarsi di due termini contigui porta sempre un valor critico.

6. *Teoremi Cartesio-Harriot, e Budan-Fourier.* Le cose dette precedentemente ci mostrano nella maniera più diretta ed elementare come si diminuiscono le variazioni di segno da un'equazione in x ad una sua trasformata in $(x-a)$ essendo a positiva, oppure dall'equazinne in $(x-h)$ a quella in $(x-k)$ essendo $k>h$; ne risulta che: *Il numero delle variazioni perdute dall' equazione in* $(x-h)$ *alla sua trasformata in* $(x-k)$ *è uguale al numero delle radici più il doppio del numero dei valori critici compresi nell' intervallo tra* h *e* $k>h$. Questo teorema importantissimo sopra ogni altro pare che sia stato trovato dal Fourier nel 1797 (§ 60 *bk*, pag. 106, § 67) (§ 60 *ax*, pag. 16) e pubblicamente da lui insegnato nel 1801 ; il Budan nei §§ 39, 52 della sua opera (1807) (§ 60 *e*) non fece che sospettarlo, ma forse nella seconda edizione, e certamente nella sua memoria del 1829 (§ 60, *z*) egli lo fece conoscere; mentre pare che la prima pubblicazione del Fourier sia stata nella sua opera postuma (1831) (§ 60 *ac*) poco valendo il cenno fattone nel 1827 (§ 60 *r*). Possiamo supporre k abbastanza grande che l' equazione in $(x-k)$ non presenti alcuna variazione di segnn, sia inoltre $h=0$; così risulta qual corollarin del precedente teorema quello che alcuni attribuiscono al Cartesio, altri all' Harriot: *Il numero delle radici positive di un' equazione o eguaglia il numero delle sue variazioni di segno o ne è inferiore di un numero pari; le variazioni di segno dell' equazione, che si ottiene mutando* x *in* $-x$ *danno egualmente un numero eguale o superiore a quello delle radici negative della proposta equazione.* Se ne deduce una regola ancnra più spedita di quella del § 5, per apprezzare i valori critici: nel primo esempio i segni $+--+$ dell' equazione $x^8-x^5-x^3+x=0$ mostrano che non vi può essere che due radici positive, mutando x in $-x$ i segni $+++-$ danno una sola radice negativa, ed essendo 8 il grado, la differenza $8-2-1=5$ mostra che $x=0$ oltre che radice è valor critico doppio. Nell' altro esempio si hanno in ambedue i casi i segni $++-$, ed $8-1-1=6$ mostra che $x=0$ oltre che radice doppia è valor critico doppio. Il teorema Cartesio-Harriot fu in vario modo dimostrato da Grunert (1827), Gauss (1828), ecc. (§§ 60, *q*, *u*), ed è singolare che niuno avesse fatto il piccolo passo da esso al teorema Budan-Fourier, cioè avesse notato che ogni radice fa perdere una variazione di segno, e che non se ne possono mai acquistare.

7. *Confine superiore a tutte le radici.* Furono date molte regole per determinare nna quantità superiore a tutte le radici (§ 60, *bo*, *bx*) ma è molto inutile occuparsi di ciò, essendo evidente che sarà superiore ad ogni radice una quantità k tale che la trasformata in $(x-k)$ abbia tutti i segni uguali. Così, per esempio, ben si vede che l'equazione $x^4-Bx^3-Bx^2-Bx-B=0$ ha tutte le radici inferiori ad $a=1+B$, giacchè col mezzo di questa *cifra* a spariscono tutte le variazioni di segno fin dalla prima riga della tabella (6) (§ 3).

8. *Separazione delle radici.* Ponendo diligente attenzione alla formazione della tabella (6) si può scorgere come debba farsi la scelta della *cifra* a in guisa di avvicinarsi ognora più ai valori che fanno svanire l' ultimo termine e perciò sono radici dell' equazione, oppure che fanno svanire un altro termine e danno un valor critico; ogni calcolo di una tabella è utile in quanto che ristringe i confini dell' intervallo in cui si perdono le variazioni di segno o separa tali variazioni; così per una via diretta e sicura si giungerà sempre ad ottenere valori quanto mai si vogliano vicini sia alle radici sia ai valori critici dell' equazione, ed il numero di quelle, più il doppio del numero di questi, eguaglia il grado. Siccome però la determinazione dei valori critici non ha alcuna importanza, così, a risparmiare ricerche infruttuose, giovano criterii, che facciano distinguere i valori critici dalle paja di radici: il criterio perfetto è quello offerto dal teorema dello Sturm (1829) (§ 60, y), ma esso è troppo laborioso perchè sia opportuno adoperarlo; gli altri criterii, che indicano la mancanza di radici, sono imperfetti in questo senso, che possono mancare le radici anche in qualche intervallo, pel quale il criterio non si verifica. — Il primo criterio è quello risultante dal teorema Budan-Fourier, *se non vi è perdita di variazioni non vi sono radici*, ma vi può esser perdita di variazioni e nulladimeno mancare le radici.

9. Fra i *criterii che provano la mancanza di radici* io trovo più comodo e quasi sempre più utile quello esposto nel § 34 della mia memoria (1846) (§ 60, *bc*), il quale non esige la conoscenza di ambedue le equazioni in x ed in $(x-a)$. Per riconoscere la mancanza di radici da $x=0$ ad $x=a>0$, coi coefficienti $A\ B\ C\ D\ E\ F$ della equazione in x, e colla cifra a si formi la prima riga della solita tabella, e ciò cominciando dall' ultimo termine, che si porrà $F^{v}=0$ e procedendo indietro ai termini E^{iv}, D''', ...

$$\begin{array}{r|l} & A+B+C+D\ +E+F \\ \hline (8)\quad a & Z+A^{0}+B'+C''+D'''+E^{iv}\ \ 0 \end{array}$$

cioè sia $E^{\text{v}}=\frac{-F}{a}$, $D''=\frac{E^{\text{iv}}-E}{a}$, $C'=\frac{D'''-D}{a}$, ... $Z=\frac{A^{0}-A}{a}$; peraltro ogni qualvolta si presenti un termine, per esempio C' , che risulterebbe di segno opposto al penultimo E^{iv} , si osservi se la differenza $D''-D$ sia superiore (fatta astrazione dal segno) a D''' , giacchè in tal caso in luogo di $D''-D$ dee prendersi $-\frac{D^2}{4D'''}$, che diviso per a darà $C''=-\frac{D^2}{4aD'''}$.
Se due termini successivi risultassero di segno opposto al penultimo E^{iv} sarebbe inutile proseguire nell' operazione, giacchè o esisterebbero realmente radici tra 0 ed a , o il criterio sarebbe insufficiente a dimostrarne la mancanza. Che se invece non si trovino mai due termini di segno opposto al penultimo E^{iv} , ed il termine Z risulti dello stesso segno di E^{iv} , ne conchiuderemo con tutta certezza che nell' intervallo tra 0 ed a non esiste alcuna radice. Nelle divisioni per a potranno porsi per comodità dei valori approssimati, purchè si abbia l' attenzione di prendere inferiori al vero valore i termini dello stesso segno del penultimo E^{iv} e superiori quelli di segno opposto. — Esempio. Si cerca se l' equazione

$$x^5-7x^4+25x^3-6600x^2+13120x-6561=0$$

abbia radici da $x=0$ ad $x=3$, ecco il calcolo

$$\begin{array}{r|l} & 1-7+25-6600+13120-6561 \\ 3 & +0+1-4+13-6560+\ 2187 \quad 0 \end{array}$$

invece della differenza $2187-13120=-10933$, che riusciva superiore a 2187 si dovette prendere $-\frac{(13120)^2}{4.2187}$, e nella divisione per 3 si pose -6560 , che è alcun poco superiore (s' intende sempre fatta astrazione del segno) al vero valore; invece $+13$ è alquanto inferiore a $\frac{-6560+6600}{3}$; al termine 0 possiamo dare lo stesso segno del penultimo $+2187$, e vedendo che non vi sono mai due termini contigui di segno opposto, ne dedurremo che l' equazione non ha alcuna radice tra 0 e 3 .

10. *Altro esempio.* Riconoscere se l' equazione

$$2x^4+16x^3+20x^2-36x+11=0$$

abbia radici comprese tra 0 ed 1

$$\begin{array}{r|l} & 2+16+20-36+11 \\ 1 & ....\ +10+30-11 \quad 0 \end{array}$$

siccome $-11+36=25$ risultava superiore a -11, così si dovette invece calcolare $\frac{-(36)^2}{-4.11}$, di cui è alcun poco superiore il numero $+30$, che si scrisse, ma dopo riuscendo di segno opposto al penultimo -11 anche il termine contiguo $+10$ non potè adoperarsi il criterio, quindi rimase dubbioso se nell' intervallo tra 0 ed 1 vi sieno radici; in realtà vi è un valor critico, come ora vedremo. Col mezzo della cifra $\frac{1}{2}$ separiamo in due parti l' intervallo tra 0 ed 1

$$\begin{array}{r|l} & 2+16+20-36+11 \\ \hline \frac{1}{2} & 2+17+28\frac{1}{2}-21\frac{3}{4}+\frac{1}{8} \\ & 2+18+37\frac{1}{2}-3 \\ & 2+19+47 \\ & 2+20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2+16+20-36+11 \\ \hline 1 & 2+18+38+2+13 \\ & 2+20+58+60 \\ & 2+22+80 \\ & 2+24 \end{array}$$

quindi tra 0 e $\frac{1}{2}$ non vi può esser radice, perchè non vi è perdita di variazioni, resta da cercare se ve ne sia tra $\frac{1}{2}$ ed 1, ed il mio criterio

$$\begin{array}{r|l} & 2+20+47-3+\frac{1}{8} \\ \hline \frac{1}{2} & -316-156-58+18-\frac{1}{4}\quad 0 \end{array}$$

(dove in luogo di $-\frac{1}{4}+3$, che è superiore a $\frac{1}{4}$ dovetti adoperare $\frac{(-3)^2}{-4.\frac{1}{4}}=9$ che diviso per $\frac{1}{2}$ dà 18, ecc.) mostra la mancanza di radici. Se si fossero adoperati i coefficienti

$$2+24+80+60+13$$

della trasformata in $(x-1)$ per cercare se manchino radici tra $x=\frac{1}{2}$ ed $x=1$, si cangerebbero alternativamente i segni, poscia per vedere se vi sieno radici tra $(-x+1)=0$, e $(-x+1)=\frac{1}{2}$ si farebbe il seguente calcolo

$$\begin{array}{r|l} & 2-24+80-60+13 \\ \hline \frac{1}{2} & +12+8-20+70-26\quad 0 \end{array}$$

e non avendo luogo il criterio (giacchè il primo termine $+12$ è di segno opposto di -26) rimarrebbe il dubbio sull' esistenza delle radici. — Scelsi a bello studio due esempii presentanti difficoltà, che ben di rado s' incontreranno, giacchè il criterio per l' assenza delle radici si adopera quando l' intervallo è più ristretto.

11. *Altri criterii.* Onde assicurarsi dell' assenza di radici da $x=0$ ad

$x=1$ il Budan (1807) calcola la trasformata in $\frac{1}{x}-1$, e se questa ha tutti i termini di ugual segno è evidente che essa non ha radici positive. Nell' esempio del § 10 questo criterio è insufficiente non solo per l'intervallo da 0 ad 1, ma anche per l' intervallo da $\frac{1}{2}$ ad 1, nel quale il mio assicura della mancanza di radici. — Il Fourier (§ 60, *ac*) suppone conosciuti gli ultimi termini delle due equazioni

$$\ldots + Gx + H = 0 \;,\; \ldots + G_n(x-a) + H_n = 0$$

e dimostra che se nelle due serie di coefficienti $A\; B \ldots E\; F$, $A\; B \ldots E_n\; F_n$ vi sia lo stesso numero di variazioni, e se la somma dei rapporti $H:G$, $H_n:G_n$ fatta astrazione dai segni superi a, l' equazione non ha radici da $x=0$ ad $x=a$. Nemmeno questo criterio può applicarsi all' esempio precedente, perchè $\frac{11}{36}+\frac{13}{60}$ è inferiore ad 1, e $\frac{1}{24}+\frac{13}{60}$ lo è a $\frac{1}{2}$. — Altri criterii furono dati dallo stesso Fourier (§ 60, *ac*, n.° 40), dal Lobatto (§ 60, *ax*) ecc. (§ 60).

12. Meno utili sono i criterii che indicano la presenza di valori critici senza mostrare in quali intervalli essi cadano. Il Young diede (§ 60, *ay*) una regola, che parmi si riduca alla seguente: sotto ciascun coefficiente dell' equazione si ponga il segno, che ha il suo quadrato diminuito dal prodotto dei coefficienti antecedente e seguente (nell'equazione completa ed ordinata), sicchè tanto sotto il primo quanto sotto l' ultimo termine si porrà il segno $+$, l' equazione avrà almeno tanti valori critici quant' è la metà del numero delle variazioni in quei segni. Così l' equazione

$$\begin{array}{cccccc} 9x^5 & -5x^4 & +4x^3 & -3x^2 & +6x & +F=0 \\ + & - & + & - & & + \end{array}$$

ha due valori critici (e quindi una sola radice) qualunque sia l' ultimo termine F; sotto i coefficienti si posero i segni di $5^2-9.4$, $4^2-5.3$, $3^2-4.6$; il segno di $6^2+3.F$ non muta il numero delle variazioni. (Vegg. § 60, *n*) *co'*). Non credo niente più utili i criterii dell' Olivier, del Duprè, del Faà (§ 60, *p*) *s*) *bp*) ecc.

13. Il criterio più utile per assicurare viceversa la presenza di qualche radice è il mutamento di segno dell' ultimo termine da un'equazione alla sua trasformata. Qualche volta può riuscir comodo il criterio dello Sturm (veggasi il § 36 della mia memoria del 1857).

14. *Teorema del Rolle.* Quando l' ultimo termine cangia di segno si perde una variazione, dunque perchè l' ultimo termine muti di segno due volte bisogna che nell' intervallo il penultimo termine cangi di segno od una o tre o rinque volte, ecc. Esaminando attentamente il modo con cui nella tabella (6) si formano i coeffirienti della trasformata in x dell' $n.^{esimo}$ grado si trova che essi sono

$$B_n = nAa + B$$
$$C_n = \frac{n(n-1)}{1.2}Aa^2 + (n-1)Ba + C$$
$$D_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}Aa^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}Ba^2 + (n-2)Ca + D \quad , \text{ecc.}$$

sicchè il penultimo termine è espresso da

$$nAa^{n-1} + (n-1)Ba^{n-2} + (n-2)Ca^{n-3} + \text{erc.}$$

che si dice la *derivata* della funzione $Aa^n + Ba^{n-1} + \text{ecc.}$; di qui il teorema del Rolle: *Tra due radici successive di un' equazione cade sempre un numero dispari di radici della sua derivata.* — Le equazioni derivate darebbero in ogni caso un modo sicuro per separare le radiri della proposta, e quindi conoscerne il numero e la posizione; giacrhè la derivata è di grado inferiore di una unità, quindi di passo in passo si giunge ad un' equazione di 1.° grado. Certamente rhe per separare le radici di un' equazione di 5.° grado sarebbe nojoso calcolare le radici di tutte le sue derivate, e sostituirle le une nelle altre; ma sarebbe peggio dover determinare l' equazione ai quadrati delle differenze, dedurne una quantità forse molto minore della minima fra le differenze, e poscia sostituire nella proposta una progressione di valori vicinissimi anrhe dove le radici sono lontanissime.

15. *Valori critici delle derivate.* La considerazione dell' equazione derivata può talvolta servir di criterio per la presenza di valori critici e conseguente mancanza di radiri. Così, per esempio, data l' equazione

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

la cui trasformata in $(x-1)$ è priva di variazioni di segno, applicando il rriterio del § 9 all' equazione derivata

$$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$1 \mid -10 \; -5 \; -1 \; +2 \; -2 \quad 0$$

si riconosre che essa è priva di radici da 0 ad 1 , perciò la proposta

equazione ne ha una sola. Per l' equazione

$$9x^n - 6x^{n-1} + 2x^{n-2} + \text{ecc.} \quad \text{essendo} \quad \tfrac{1}{4}6^2 \leqq 9.2$$

basta considerare la derivata di secondo grado

$$9\frac{n(n-1)}{2}x^2 - 6(n-1)x + 2 = 0$$

per assicurarsi che vi è un valor critico. Veggansi i § 27 . . . 32 della mia memoria del 1857. — I valori critici potrebbero opportunamente distinguersi secondo che sono radici delle derivate prima, seconda, ecc.; i primi danno le ascisse, a cui nella curva parabolica corrispondono le ordinate positive minime o negative massime, i secondi sono le ascisse dei punti di flesso contrario, ecc.

16. ***Risoluzione delle equazioni algebriche.*** Il metodo più opportuno per determinare le radici di un' equazione, sia dessa di 1.°, di 2.° o di qualsiasi grado anche elevatissimo (eccettuati soltanto alcuni casi speciali) è tutto fondato sul teorema Budan-Fourier, sul processo di calcolo dato al § 3 e sulle conseguenze che nascono dal processo medesimo; questo è tanto semplice e naturale che sarebbe nojoso spiegare tutte le considerazioni che si presenteranno spontaneamente, ne indicherò le principali applicandole all' esempio

$$x^5 - 25{,}063x^4 - 17{,}156x^3 + 419{,}204x^2 + 240{,}375x - 2249{,}148 = 0 \quad .$$

Notando che vi sono tre sole variazioni di segno; cerchiamo da prima se vi sieno radici negative; mutando x in $-x$ abbiamo i coefficienti, che noi prendiamo approssimatamente in guisa peraltro di facilitare la realtà delle radici (sicchè se le troveremo immaginarie saremo certi che tali sono quelle della proposta), per far mutare il segno all' ultimo termine può sembrar opportuna la *cifra* 3 , ma questa fa sparire ambedue le variazioni, le quali si mantengono colla *cifra* 2

$$\begin{array}{r|l}
 & -1-25+\ 18+420-240-2249 \\
\hline
3 & -1-28-\ 66+222+426-\ 971 \\
 & -1-31-159-255-339 \\
\hline
2 & -1-27-\ 36+348+456-1337 \\
 & -1-29-\ 94+160+776 \\
 & -1-31-156-152
\end{array}$$

ed è abbastanza evidente che esse dipendono da un valor critico; del resto col seguente calcolo

$$\begin{array}{r|l}
 & -\quad -\quad -152+\ 776-1337 \\
\hline
1 & +\quad +\quad +561+1337+\quad 0
\end{array}$$

il criterio del § 9 mostra la mancanza di radici tra 2 e 3 . Passiamo alle radici positive, per le quali si scorge a colpo d' occhio l' opportunità di tentare la cifra 3 , il mutare di segno dell' ultimo termine che diventa +4,498 avverte d' avere oltrepassata una radice, sicchè si potrebbe ripetere il calcolo colla cifra 2 oppure adoperare una cifra negativa, preferii determinare intanto la radice maggiore di 3 :

	1—25,063— 17,156+419,204+240,375—2239,148
3	1—22,063— 83,345+169,169+747,882+ 4,498
	1—19,063—140,534—252,433— 9,417
	1—16,063—188,723—818,602
	1—13,063—227,912
	1—10,063

	—0,228	—81,86	— 94,2	+ 4498
06″	—0,228	—83,23	—593,6	+ 936
	—0,23	—84,6	—1101	
	—0,2	—86		
8‴		—0,86	—117,0	+ 0

passando ai decimi, i forti termini negativi, che precedono l' ultimo, mostrano che la radice non può contenere alcun decimo, e con un poco di attenzione, rammentando che lo scopo si è di far annullare l' ultimo termine, si scorge che la cifra più opportuna è la $6'' = 0,06$. Nella supposizione che i coefficienti della proposta equazione sieno approssimati con possibili errori di mezza unità nelle ultime cifre, sarebbe inopportuno aggiungere degli zeri; sicchè l' ultimo termine si moltiplica per 1000 ed è 4498 , il penultimo dee moltiplicarsi soltanto per 10 (giacchè la cifra 6″ è di centesimi) ed ommettendo l'ultima decimale, che pochissimo influirebbe nei calcoli, è —94,2 , i termini precedenti deggiono dividersi per 10 , per 1000 ecc., per ciaschedun termine si ritiene una decimale di più di quello contiguo a dritta; così si hanno soltanto i termini —81,86 —0,228 ; sui quali si opera colla cifra 6″ dicendo 6 via 8 fa 48 , di cui si porta 5 , 6 via 2 fa 12 e 5 17 e 6 23 , scrivo 3 e porto 2 , 6 via 2 12 e 2 14 e 8 22, scrivo 2 , ecc.; nelle righe seguenti giova diminuire di una le decimali di ciascuna colonna;

la seconda riga si calcola dicendo 6 via 3 18 e 3 21 , porto 2 , 6 via 2 12 e 2 14 e 2 16 , scrivo 6 e porto 1 , 3 e 1 4 , che scrivo, ecc. Dividendo il penultimo termine —1101 per 10 e l' antipenultimo —86 per 100 si ottengono i termini, che servono per la terza tabella, la quale si calcola colla cifra 8‴ , cioè $-8\times0{,}86-110{,}1=-117{,}0$, $-8\times117+936=0$. Così si trovò la radice $x=3{,}06800$. Potremo ora togliere il fattore $x-3{,}06800$, il che oltre semplificare l' equazione ci serve di prova del fatto. Non sono mai da trascurarsi le prove, così nella prima tabella si osserverà se nella seconda colonna dal primo —25,063 all'ultimo —10,063 vi sia la differenza 3×5 ; poscia sommati i quattro numeri di questa colonna si osserverà se la somma —70,252 moltiplicata per la cifra 3 dia la differenza tra i numeri —17,156 —227,912 della colonna seguente, e così per le altre. — La divisione per $x-3{,}068$ si eseguisce colla *cifra* 3,068 facendo le moltipliche nella nota maniera che vale per le decimali

	1	—25,063	—17,156	+419,204	+240,375	—2239,148
3,068		+ 3,068	—65,985	—253,9101	+478,6158	+2189,5182
			13197	50782	95723	43,7903
			1760	6771	12763	5,8387
	1	—21,995	—84,6367	+159,5386	+729,8394	— 0,0008

	1	—21,995	— 84,637	+159,539	+729,839
3	1	—18,995	— 141,622	—265,327	— 66,142
	1	—15,995	— 189,607	—834,148	
	1	—12,995	— 228,592		
	1	— 9,995			

	— 0,010	— 22,86	— 8341,5	—66142
—09″	— ,010	— 22,77	— 8136,6	+ 7087
	— ,01	— 22,7	— 7932	
8‴	— 0,23		— 795,0	+ 727
9^{iv}	— 0,2		—79,7	+ 10
1^{v}			—8,0	+ 2

Compiuta la divisione sarebbe occorso qualche tentativo per iscegliere la cifra opportuna a diminuire l'ultimo termine 729,839 , ma avendo precedentemente trovato che una radice è di poco inferiore a 3 , abbiamo adoperata la cifra 3 , e poscia la negativa $-9''=-0,09$, ed in fine si ottenne la radice 2,91891 . Dividendo per $x-2,91891$ si ottiene un'equazione di 3.° grado, i cui coefficienti 1—19,0761—140,3181—250,0374 mostrano che la radice contiene alcune decine, perlochè li moltiplicheremo per la progressione 1000 100 10 1 , e continueremo il calcolo colla cifra $2^{\circ}=20$, (giacchè la 3° farebbe sparire tutte le variazioni di segno)

	1000	—1907,61	—1403,18	— 250,037
2°	1000	+ 92,39	—1218,4	—2686,8
	1000	+ 2092,4	+2966,4	
	1000	+ 4092,4		
	10	+409,24	+2966,4	— 26868
5	10	+459,24	+5262,6	— 555
	10	+509,2	+7809	
	10	+559		
		0,06	+78,1	— 555
07''		0,06	+78,5	— 5
07^IV			+0,8	0

Così abbiamo trovata l'ultima radice 25,0707 . Finalmente rimane il fattore di secondo grado

$$x^2+5,995x+9,981=0 \quad .$$

17. *Altri metodi.* I matematici cercarono per molto tempo un metodo generale e comodo per risolvere qualsiasi equazione algebrica, e quando esso fu trovato, continuarono a cercarlo, e suggerirono parecchi metodi a quello di gran lunga inferiori. Olivier (1827) trova che il metodo del Budan non è opportuno per ottenere grande approssimazione e propone l'interpolazione. Dandelin (1828) adopera le radici delle equazioni derivate per separare quelle dell'equazione proposta. Legendre (1816, 1830) risolve le equazioni *omali.* Jacobi (1830) propone le serie infinite. Galois (1830) commenta il metodo del Legendre. Vincent (1834) adopera un processo misto. Libri (1837) annuncia un

metodo di maravigliosa generalità, ma ..... Cauchy (1837, 1840) (§ 68 *ao*, *as*) adopera l'approssimazione parabolica, le funzioni interpolari, la serie del Lagrange ecc. Il metodo delle serie ricorrenti trovato dal Bernoulli è proposto dal Lagrange (1808), dal Legendre (1830), dal Gräffe (1832), dallo Stern (1832, 1841), dal Jacobi (1834), dal Mainardi (1840). Vincent sembra richiedere (1838) che si determini una quantità inferiore alle radici dell'equazione ai quadrati delle differenze. Encke propone (1841) il metodo del Gräffe, che io mostrai (§ 60, *bc*) molto meno comodo della quinta operazione aritmetica. Waltinowsky adopera (1846) il regresso delle serie. Cauchy propone (1847) (§ 60, *bi*) un nuovo metodo. Pacinotti espone (1850) l' operazione aritmetica per l' estrazione dei fattori. Moth dà (1850) un metodo piuttosto elegante che utile per trovare ordinatamente le cifre delle radici: io lo annunciai negli Atti dell' Istituto (26 aprile 1852) (§ 60, *bv*). Spitzer riproduce (1850) il processo Budan-Horner. Gauss adopera (1850) i logaritmi addittivi per la risoluzione delle equazioni trinomie. Mainardi pubblica (1852) un nuovo calcolo per la risoluzione delle equazioni. Moigno (1851) ed Housel (1856) presentano come praticamente utile quel metodo del Cauchy, pel quale si separano i termini positivi dai negativi dell' equazione. Piobert (1851) risolve le equazioni trinomie come se fossero derivative di 2.° grado, il che dà un metodo d'approssimazione, di cui trattò anche il Genocchi (1859). Thereim (1855) adopera gli sviluppi in serie, la costruzione geometrica, e le equazioni derivate. Valz (1855) trovando troppo laborioso il metodo del Gräffe propone un metodo opposto, che consiste a mutare la x nella x^{10} poscia supporre $x=1$. Fergola (1857) sviluppa le radici in serie infinite. Valz (1859) sembra ammettere che per risolvere le equazioni si debba ricorrere all' equazione ai quadrati delle differenze, e perciò propone sviluppi in serie, e per le equazioni di 5.° grado crede che sia adoperabile la loro riduzione alla forma $x^5-x-a=0$.

18. *Metodo del Weddle.* Rimanendo a mio credere indubitato che il processo Ruffini-Budan-Fourier-Horner è il più comodo per risolvere un' equazione algebrica in generale, e che è inutile ricercarne alcun altro, egli è pur vero che per alcune speciali equazioni potranno essere opportuni altri metodi, che meritano quindi d' esser conosciuti. Sono principalmente osservabili le equazioni mancanti di molti termini, le quali non di rado si presentano nella matematica applicata; il metodo generale toglie a tali equazioni questo loro pregio, giacchè nelle trasformate s' introducono tosto tutti i termini che mancavano. Credo

adunque importante il metodo del Weddle, che io conobbi dall' opera dello Schnuse (§ 60, *bk*), ma che dev' essere stato pubblicato parecchi anni prima. Premetto la considerazione dei

19. *Fattori decimali.* L' ordinaria maniera di esprimere le frazioni si è per *addizione* di alcuni decimi, poi di alcuni centesimi, di alcuni millesimi, ecc. sempre dallo 0 al 9 : vi è un' altra utile maniera di esprimere una frazione; e ciò per moltiplicazione di fattori, il primo dei quali sia l' unità più alcuni decimi, il secondo l' unità più alcuni centesimi, il terzo l' unità più alcuni millesimi, ecc. sempre dallo 0 al 9 . Proponiamoci di esprimere con questi *fattori-decimali* la radice dell' equazione di primo grado

$$2250241x - 8508629 = 0 \quad ;$$

si comincia la divisione nel modo solito, e si ottiene la cifra intera 3 , per la quale si moltiplica il divisore 2250241 e si ottiene il secondo divisore 6750723 , che nel residuo 1757906 capisce 0,2 volte e dà il residuo 407761 , il quale si divide pel terzo divisore 8100868 ottenuto

		8508629
3,	2250241	1757906
$2'$	6750723	407761
$5''$	8100868	2718
03^{iv}	8505911	166
1^{v}	8508463	81
9^{iv}	8508548	4

moltiplicando 6750723 per 1,2 ; si continua nello stesso modo formando sempre ciascun divisore col sommare al precedente il suo prodotto per la cifra decimale già trovata. Giova notare che ciascun divisore unito col suo dividendo dà per somma il primo dividendo, se si volesse rinunciare a questa verificazione, nella colonna dei divisori potrebbero ommettersi molte cifre. Per tal modo il valore x è espresso dai *fattori-decimali*

$$x = 3 \,.\, 1{,}2 \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}0003 \,.\, 1{,}00001 \,.\, 1{,}000009 \,.\, 1{,}0000005 \quad ,$$

il che per brevità scrivesi

$$x = 3\cdot{,}2\cdot5\cdot0\cdot3\cdot1\cdot9\cdot5$$

Se ne ricava il valore sotto la solita forma decimale operando in uno dei due modi seguenti

3·,2·5·0·3·1·9·5	3·,2·5·0·3 1 9 5
3, 6	3,0 0 0 9 5 8 5
3, 7 8 0	3, 1 5 1 0 0 6 4
3, 7 8 1 1 3 4 0	3, 7 8 1 2 0 7 7
3, 7 8 1 1 7 1 8	
3, 7 8 1 2 0 5 8	
3, 7 8 1 2 0 7 7	

cioè moltiplicando il numero 3 pei fattori-decimali cominciando dai primi, oppure dagli ultimi, così

$3\times1{,}0003195=3{,}0009585$, $1{,}05\times3{,}0009585=3{,}1510064$, ecc.

L' operazione è più comoda quando l' ultimo termine dell' equazione di primo grado è l' unità, così, per esempio, data la

$$31{,}415927x-1=0$$

si divide l'unità per la centesima parte del coefficiente di x (acciocchè il quoziente sia tra 1 e 10) e si ottiene il quoziente 3 ed il residuo ,05752219 , questo diviso pel suo complemento 0,942 . . .

3·,0·6·0·9·7 4 3 9

0 5 7 5 2 2 1 9
0 9 7 3 5 2
7 4 3 9

dà il quoziente ,06 (che si scrive) ed il residuo ,00097352 (il quale si ottiene facendo a memoria il prodotto $1{,}06\times5752219$ e sottraendovi ,06); questo secondo residuo diviso pel proprio complemento ,99902 . . dà per quoziente la sua prima cifra ,0009 ed il residuo 7439 ottenuto formando a memoria il prodotto $1{,}0009\times97352$ e dal prodotto sottraendo la cifra 9 già scritta nei fattori-decimali; giunti alla metà delle cifre si ha senza più

$$100x=3·,0·6·0·9·7\,4\,3\,9 \quad .$$

20. *Logaritmi del Leonelli.* La predetta decomposizione in fattori-decimali

fu molto utilmente adoperata dal matematico Italiano Leonelli per calcolare (§ 60, *b*) con molte decimali il logaritmo di un numero, o viceversa, e ciò col sussidio di una breve tavola contenente i logaritmi dei fattori-decimali semplici. Ecco in via di saggio la tavoletta dei logaritmi iperbolici con 8 decimali

		$1'$	09531018	$1''$	0995033	$1'''$	099950	1^{IV}	10000
2	0,69314718	$2'$	18232156	$2''$	1980263	$2'''$	199800	2^{IV}	19998
3	1,09861229	$3'$	26236426	$3''$	2955880	$3'''$	299551	3^{IV}	29996
4	1,38629436	$4'$	33647224	$4''$	3922071	$4'''$	399202	4^{IV}	39992
5	1,60943791	$5'$	40546511	$5''$	4879016	$5'''$	498754	5^{IV}	49988
5	1,79175947	$6'$	47000363	$6''$	5826891	$6'''$	598207	6^{IV}	59982
7	1,94591015	$7'$	53062825	$7''$	6765865	$7'''$	697561	7^{IV}	69976
8	2,07944154	$8'$	58778666	$8''$	7695104	$8'''$	796817	8^{IV}	79968
9	2,19722458	$9'$	64185389	$9''$	8617770	$9'''$	895974	9^{IV}	89960

si ommettono i logaritmi iperbolici degli altri fattori 1,00001 , 1,00002 , ecc. perchè essi sono eguali alla cifra del fattore-decimale. Per esempio, onde calcolare $\text{lgh}\, 3{,}1415927$, si eseguirà come nel § precedente la decomposizione del suo valore inverso nei fattori-decimali $3 \cdot {,}0 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 9 \cdot 7\,4\,3\,9$, i cui logaritmi iperbolici sottratti dal $\text{lgh}\, 10 = 2{,}302585093$ daranno

$$
\begin{array}{rr}
\text{lgh}\, 10 = & 2{,}30258509 \\
\text{lgh}\, 3 = & 1{,}09861229 \\
6'' & 5826891 \\
9^{\text{IV}} & 89960 \\
 & 7439 \\
\hline
\text{lgh}\, 3{,}1415927 = & 1{,}1447299
\end{array}
$$

21. Per le *equazioni prive di molti termini* (ed in particolare per l'estrazione di radice delle quantità) è opportunissimo il processo del Weddle, pel quale il valore della radice cercata si divide prima per una potenza del 10 , poscia per uno degli interi 1 , 2, 3 . . . 9 , poscia successivamente pei *fattori-decimali*, in guisa che nelle trasformate la radice vada ognora più avvicinandosi all' unità. Le potenze dei fattori-decimali possono aversi in un' apposita tavoletta, o si trovano mediante la formula Newtoniana del binomio. Per passare dall' equazione

$$(1) \qquad Ax^\alpha + Bx^\beta + \text{ecc.} = 0$$

alla trasformata che abbia le radici $x_1 = \frac{x}{p}$ basta mutare i predetti coefficienti nei

$$Ap^\alpha \quad Bp^\beta \quad \text{ecc.};$$

risulta dal § 14 che l' equazione avente per radici quelle della (1) diminuite dell' unità ha l' ultimo termine

$A + B + \text{ecc.}$, il penultimo $\alpha A + \beta B + \text{ecc.}$, l'antipenultimo $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} A + \text{ec.}$, ec. sicchè non sarà difficile determinare approssimatamente ciascun fattore-decimale contenuto nella radice.

22. Prendo dall' opera dello Schnuse (§ 60 *bk*) l' esempio

$$7x^{16} + 170x^8 + 652x^4 + 1342x^2 + 5362x - 3918500 = 0 \quad ;$$

mediante tentativi si riconoscerà che la radice positiva cade tra 2 e 3; perciò il primo fattore contenuto in x sarà 2 , le cui potenze sono 2 , 4 , 16 , 256 , 65536 , per le quali si moltiplicano (come qui sotto si vede) i coefficienti della proposta equazione, e si ottengono quelli della prima trasformata in $x_1 = \frac{x}{2}$. Per determinare il fattore-decimale contenuto in x_1 occorrerebbero parecchi termini

	$7x^{16}$	$+ 170x^8$	$+ 652x^4$	$+ 1342x^2$	$+ 5326x$	$- 3918500$	
2	65536	256	16	4	2		
x_1	458752	+ 43520	+ 10432	+ 5368	+ 10652	− 3918500	
1′	4,594973	2,14359	1,4641	1,21	1,1		
x_2	2107953	+ 93289	+ 15273	+ 6495	+ 11717	− 3918500	
3″	1,604706	1,26677	1,1255	1,0609	1,03		
x_3	3382645	+ 118176	+ 17190	+ 6891	+ 12069	− 3918500	= − 381529
6‴	1,1004424	1,04902	1,0242	1,012	1,006		
x_4	3,722406	+ 123969	+ 17606	+ 6974	+ 12141	− 3918500	
5^{IV}	1,008030	1,00407	1,0020	1,001	1,0005		
x_5	3752300	+ 124469	+ 17641	+ 6981	+ 12147	− 3918500	= 4962
	0,0016	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001		
	6004	+ 99	+ 7	+ 1	+ 1	= 6112	

	4 +611 2—4962
8^{v}	0,04+611,5— 70
1^{vi}	+61,1 — 9
1^{vii}	6,1 — 3

della trasformata in $(x_4 - 1)$; nel presente caso possiamo invece notare che il primo termine dell' equazione è molto preponderante in confronto dei seguenti, sicchè mediante i logaritmi estrarremo la radice 16.^{a} dell' ultimo termine diviso pel coefficiente del primo ed avremo approssimatamente $x_4 = 1{,}143$ che si decompone nei fattori-decimali $1{\cdot},1{\cdot}3{\cdot}9$; quindi i coefficienti della trasformata in x_4 si moltiplicheranno per le potenze 16.^{a} 8.^{a} 4.^{a} 2.^{a} 1.^{a} del fattore 1,1 e poscia anche del fattore 1,03 . La somma di tutti i coefficienti dell' equazione in x_3 è —381529 , questo è l' ultimo termine della trasformata in $(x_3 - 1)$, il penultimo si ottiene sommando i coefficienti (§ 21) moltiplicati rispettivamente per 16 , 8 , ecc., esso è circa 55160000 e l' antipenultimo è 409000000 , sicchè il valore approssimato di $x_3 - 1$ è 0,0066 . A motivo dei termini ommessi, che sono tutti positivi, questo valore sarà eccedente, ed infatti dopo aver adoperati i fattori 1,006 1,0005 , dai coefficienti dell' equazione in x_5 trovammo i tre ultimi di quella in $(x_5 - 1)$, dai quali ricavammo $x_5 = 1{,}0000811$; perciò abbiamo trovata la radice

	0,41+55,2—382
6$'''$	0,41+57,7— 36
6^{iv}	0,4 +60

$$x = 2{,}1{\cdot}3{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}811 = 2{,}2809208 \quad .$$

La forma speciale dell' equazione avrebbe permesso di risolverla col

23. *Metodo delle successive sostituzioni*, che consiste nel lasciare nel primo membro il solo termine preponderante $7x^{16}$ e sostituire nel secondo membro i valori approssimati della x che successivamente si trovano mediante le estrazioni di radici 16.^{a} (Vegg. § 33).

24. *Metodo dei fattori-decimali col mezzo dei logaritmi.* Adottando di esprimere l' incognita col prodotto di una serie di fattori, si presenta naturalmente l' uso dei logaritmi; un esempio mostrerà abbastanza come si opererebbe anche in casi più complicati. Ponendo nell' equazione

$$x^3 - 485x + 1215 = 0$$

prima $x = 3$ poscia $x = 4$, si può prevedere che le due radici positive,

se esistono, cadono fra 3 e 4 ; fatto $x=3x_1$ avremo

$$243x_1^5-1455x+1215=0$$

la trasformata in (x_1-1) ha i tre ultimi termini coi coefficienti

	2430	-240	$+\ 3$			2430	-240	$+\ 3$
01″	2,4	$-21,6$	$+\ 8$		08″	2,43	$-\ 4,6$	$-\ 7$
	2,4	-19				2,4	$+\ 15$	
5‴		$-1,9$	$-\ 1$					

che danno i due valori approssimati $x_1=1,015$, $x_1=1,08$. Mediante il logaritmo del primo otterremo i coefficienti della trasformata in x_2 essendo $x_1=1,015x_2$; l' ultimo termine della trasformata in (x_2-1) è $-0,050$ ottenuto unendo col 1215 i numeri $-1476,827$ $+261,777$ corrispondenti ai logaritmi 3,1693290 2,4179323 , ed il penultimo termine 169 risulta dai predetti numeri moltiplicati per gli esponenti 1 e 5 ;

			$+\ 1215$	
log 1455 = 3,1628630	log 243 = 2,3856023	$-$	1476,827	$+1477$
log 1,015 = 0,0064660	0323300	$+$	261,777	-1308
3,1693290	2,4179323	$-$	0,050 :	169 = $-0,000286$
log 0,999714 = $-$ 1242	$-$ 6210			
3,1692048	2,4173113	$-$	1476,4027	$+1476$
		$+$	261,4034	-1307
log 1,0000041 = 18		$+$	0,0007 :	169 = 0,0000041
log x_1 = 0,0063436 ,	x_1 = 1,014714			

colla divisione di $-0,050$ per 169 si trova il valor approssimato $x_2-1=-0,000286$ il logaritmo di 0,999714 serve a calcolare i coefficienti dell' equazione in x_3 essendo $x_2=0,999714.x_3$; se ne deduce $x_3-1=0,0000041$; finalmente sommando i trovati logaritmi si ha il $\log x_1$ ed $x_1=1,014714$. In simil modo si trova l' altra radice $x_1=1,076569$. Si determina pure la radice negativa della proposta equazione, che è

$$x=-5,1793 \quad .$$

25. *Altre espressioni approssimate.* Le due maniere di esprimere le quantità minori dell' unità per frazioni decimali e per fattori-decimali sono artificiali, dipendendo da uno speciale sistema di numerazione; invece sono approssimazioni naturali quelle a *frazioni continue* della forma

$$(1) \quad 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots = 1 : \{a_1 + 1 : [a_2 + 1 : (a_3 + \text{ec.})]\}$$

dove il denominatore intero a_1 è accresciuto di una frazione, il cui numeratore è l' unità ed il denominatore è l' intero a_2 accresciuto di un' altra simile frazione, ecc.; e quelle a *parti aliquote*

$$(2) \quad a_1 \diagdown 1 + a_2 \diagdown 1 + a_3 \diagdown 1 + \text{ec.} = \frac{1}{a_1}\{1 + \frac{1}{a_2}[1 + \frac{1}{a_3}(1 + \text{ec.})]\}$$

dove al denominatore intero a_1 spetta per numeratore l' unità accresciuta di una frazione col denominatore intero a_2 e col numeratore che è l' unità accresciuta di una simile frazione, ecc. In ambedue queste forme di frazioni i numeratori possono anche essere l' unità negativa. Nella (1) i denominatori sono spesse volte numeri piccoli, invece nella (2) i denominatori formano una serie crescente, e se si adoperano anche i termini negativi essa è più crescente della progressione geometrica a quoziente 2.

26. *Frazioni continue*. Poco ho da aggiungere a quanto riportai nel § 55 della mia prima memoria (§ 60, *bc*). Data, per esempio, l' equazione

$$x^3 - 16x^2 + 5x + 551 = 0$$

si vede che si perdono due variazioni di segno da $x = 10$ ad $x = 11$; posto $x - 10 = \frac{1}{x_1}$ si perdono ancora due variazioni da $x_1 = 1$ ad $x_1 = 2$, e posto $x_1 - 1 = \frac{1}{x_2}$ se ne perde una sola da $x_2 = 13$ ad $x_2 = 14$

$$\begin{array}{r|l} & 1-16+5+551 \\ \hline 10 & 1-\ 6-55+\ 1 \\ & 1+\ 4-15 \\ & 1+14 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 1-15+14+1 \\ \hline 1 & 1-14+\ 0+1 \\ & 1-13-13 \\ & 1-12 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 1-13-12+1 \\ \hline 1 & 1-12-24-23 \\ & 1-11-35 \\ & 1-10 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 1-13-12+\ 1 \\ \hline 13 & 1-\ 0-12-155 \\ & 1+13+157 \\ & 1+26 \end{array}$$

sicchè per ambedue le radici è $a = 10$, e per la maggiore di esse si ha $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, continuando si trova $a_3 = 1$, $a_4 = 6$, $a_5 = 5$, $a_6 = 1$, $a_7 = 4$, ecc., perciò una radice è

$$x = 10 + 1/1 + 1/13 + 1/1 + 1/6 + 1/5 + 1/1 + 1/4 + \text{ec.}$$

Senza progredire ad altre equazioni si può dare all' ultimo denominatore 4 un valore più approssimato mediante un' osservazione fatta dal Lagrange (§ 60, *f*) (Veggasi anche il Legendre § 60, *k* n.° 102): l' equazione in x_7 ha una sola radice tra 13 e 14, le altre $(n-1)$ radici (indicato con

n il grado dell'equazione) ne differiscono sensibilmente; ora i calcoli fatti danno

$$x_2 = 13 + 1/1 + 1/6 + 1/5 + 1/1 + 1/x_7 \quad ,$$

e mediante le note frazioni convergenti

$$\frac{13}{1} \; , \; \frac{14}{1} \; , \; \frac{97}{7} \; , \; \frac{499}{36} \; , \; \frac{596}{43}$$

si ha $\quad x_2 = \dfrac{499+596x_7}{36+43\;x_7} \quad$ da cui $\quad x_7 = \dfrac{36x_2-499}{596-43x_2} \quad .$

La trasformata in x_7 che è

$$-1549\,x_7^3 + 4880x_7^2 + 11429\,x_7 + 5239 = 0$$

ha n radici, tra le quali $(n-1)$ di poco differiscono da $-\frac{36}{43}$ giacchè quando x_2 differisce sensibilmente da 13 si ha $\frac{36x_2-499}{596-48x_2} = \frac{36}{-43}$ dunque per la nota relazione tra la somma delle radici d' un' equazione e i suoi due primi coefficienti il cercato valore di x_7 sarà approssimatamente

$$\frac{4880}{1549} + (n-1)\frac{36}{43} = 3{,}150 + 1{,}674 = 4{,}184 \quad .$$

Si può anche risparmiare il calcolo delle frazioni convergenti da x_2 in poi, giacchè per la teoria delle frazioni continue è

$$\frac{43}{36} = 1 + 1/5 + 1/6 + 1/1$$

essendo 1 , 5 , 6 , 1 i denominatori già trovati presi in senso opposto; così chiamato $-s$ il rapporto $-3{,}150$ dei due primi coefficienti dell' equazione in x_7 , a cui ci vogliamo arrestare, sarà

$$x_7 = s + (n-1)/a_6 + 1/a_5 + 1/a_4 + 1/a_3$$

prendendo i denominatori già trovati a_6 a_5 ... fino a quello che susseguе l' equazione in x_2 avente tra a_2 ed a_2+1 la perdita di una sola variazione di segno.

27. Le *frazioni a parti aliquote* furono da prima considerate dal Lambert poi dal Lagrange (*J. Ec. polyt.* II, p. 93) e dal Fourier (§ 60, *ac*, pag. 38), finalmente J. Horner (§ 60, *cr*) se ne servì per esprimere la radice d' un' equazione. Il processo è il seguente: essendo a il massimo intero contenuto nella radice x , si calcola la trasformata in $x-a=x_1$; rovesciando l' ordine dei coefficienti si scorge qual sia la trasformata in $\frac{1}{x_1}$ e quale l' intero a_1 che

più approssima ad $\frac{1}{x_1}$; moltiplicando i coefficienti dell'equazione in x_1 per le potenze di a_1 si ottiene un' equazione in $a_1 x_1$, che ha una radice poco differente dall' unità; si passa alla trasformata in $a_1 x_1 - 1 = x_2$, la cui inversa (cioè l' equazione in $\frac{1}{x_2}$) avrà una radice poco discosta dall'intero a_2 e si procederà come sopra. Ecco il calcolo per la risoluzione della

$$x^3 - 45 = 0$$

avendo scelto il valore $a = 4$ che si avvicina superiormente alla cercata radice; la trasformata in $\frac{1}{x_1}$ ha i coefficienti $19 + 48 + 12 + 1$ e la radice -3 , per le cui potenze si moltiplicano questi coefficienti, e dopo mediante il solito calcolo colla cifra 1 si ottengono i coefficienti $1 - 33 + 363 - 116$ dell' equazione in $a_1 x_1 - 1 = x_2$ la cui inversa in $\frac{1}{x_2}$ ha la radice 3 , ecc. Si noti che per ottenere $a_1 = -3$ si divise 48 per 19

	1+ 0+ 0—45	
4	1+ 4+16+19	
	1+ 8+48	—9
	1+12	
—3	1—36+432—513	—81
1	1—35+397—116	
	1—34+363	+15
	1—33	
3	1—99+3267	+135
1	1—98+3169+37	
	1—97+3072	+1
—83	1—96	

e si ebbe il residuo -9 , che moltiplicato per $(-3)^2$ e sommato con -35 termine antipenultimo, dà l'ultimo termine -116 , ciò facilita alcun poco il calcolo risparmiando di scrivere -513 . Così nella seconda trasformata il 363 diviso per -116 oltre il quoziente 3 diede il residuo $+15$, che moltiplicato per 3^2 risulta $+135$, il quale sommato con -98 dà l'ultimo termine 37 della terza trasformata, per cui diviso il coefficiente 3072 si ottiene il terzo quoziente -83 ed il residuo $+1$; così continuando si trova

$$\sqrt[3]{45} = 4 - {}_{3}\backslash^{1} + {}_{3}\backslash^{1} - {}_{83}\backslash^{1} - {}_{1485}\backslash^{1} - \text{ec.} =$$

$$= 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{747} - \frac{1}{747.1425}$$

si ha pure $\sqrt[3]{45} = 4 - {}_{2}\backslash^{1} - {}_{9}\backslash^{1} + {}_{42}\backslash^{1} - \text{ecc.}$

28. Le radici seconde conducono a frazioni singolarmente convergenti, eccone alcuni esempii, nei quali il calcolo si potè alcun poco abbreviare

	1—0 —2			1+0 —44			3—17 —21	
1	1+1 —1		7	1+7 + 5		7	3+4 + 7	
	1+2	+0		1+14	—1		3+25	+4
2	1+4	+0	—3	1—42	+3	—3	3—75	—12
2	1+6 +1	+0	2	1—40+ 4	+0	2	3—69 — 9	+3
—6	1—36	+0	10	1—400	+0	—8	3+552	—24
2	1—34+1	+0	2	1—398+1	+0	2	3+558—21	—9
34			398			27		

Nelle $\sqrt{2}=1+{}_{2}\diagdown^{1}-{}_{6}\diagdown^{1}+{}_{34}\diagdown^{1}+{}_{1154}\diagdown^{1}+$ ec.

$\sqrt{44}=7-{}_{3}\diagdown^{1}+{}_{10}\diagdown^{1}+{}_{398}\diagdown^{1}+{}_{158402}\diagdown^{1}+$ ecc.

è facile riconoscere che, dopo un certo punto, ogni denominatore è di due unità minore del quadrato del precedente. Su questo argomento può anche vedersi una memoria del Frisiani § 60, *be*.

29. Il *metodo d' interpolazione* è utilissimo perchè applicabile a tutte le sorta di equazioni anche trascendenti; da alquante false posizioni si deduce l' equazione algebrica che le rappresenta, e la risoluzione di questa dà con sufficiente approssimazione la quantità ricercata. Nella nota IV della mia prima memoria (§ 60, *bc*) riportai le formule d' interpolazione quando si conoscono i valori corrispondenti ad alquanti valori della x procedenti in progressione aritmetica, e nell' altra memoria (§ 60, *cj* n.° 12) riportai una formula dell'Encke alcun poco più comoda di quella data precedentemente; ora parmi che, piuttostochè far uso di quelle formule, sia meglio attenersi sempre al metodo generale d' interpolazione, che serve qualunque sieno i valori dati della funzione, ed al quale può darsi tale disposizione da rassomigliare alla quinta operazione aritmetica. Dati alquanti valori y_1 y_2 y_3 y_4 .... corrispondenti ai x_1 x_2 x_3 x_4 ... , si calcolino le funzioni interpolari prime

$$y_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ ,\quad y_{23}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\ ,\quad \ldots\ldots$$

poi le seconde

$$y_{123}=\frac{y_{23}-y_{12}}{x_3-x_1}\ ,\quad y_{234}=\frac{y_{34}-y_{23}}{x_4-x_2}\ ,\quad \ldots\ldots$$

le terze $\quad y_{1234}=\frac{y_{234}-y_{123}}{x_4\ -x_1}\quad , \quad \ldots . \quad , \text{ec.}$

Nel caso che le $x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots .$ formino una progressione aritmetica, le funzioni interpolari differiscono dalle differenze finite soltanto pei divisori Δx , $1.2\Delta x^2$, $1.2.3\Delta x^3$, ... Si scrivano in una tabella analoga alla seguente i i valori di $x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_{12} \; x_3 \; y_{123} \; x_4 \; y_{1234} \; y_{12345}$

$$\begin{array}{c|lllll}
y= & Ax^4+ & Bx^3+ & Cx^2+ & Dx+ & E \\
\hline
x_1 & A & B_1 & C_2 & D_3 & y_1 \\
x_2 & A & B_2 & C_3 & y_{12} & \\
x_3 & A & B_3 & y_{123} & & \\
x_4 & y_{12345} & y_{1234} & & &
\end{array}$$

poscia procedendo *dal basso all' alto* si calcolino i coefficienti $A \;\; B_3 \;\; B_2$ $C_3 \;\; B_1$ ecc. col mezzo delle solite equazioni

$$y_{12345}=A \quad , \quad x_4 y_{12345}+B_3=y_{1234} \quad , \quad x_3 A+B_2=B_3 \quad , \quad xB_3+C_3=y_{123} \; ,$$
$$x_2 A+B_1=B_2 \quad , \quad x_2 B_2+C_2=C_3 \quad , \quad x_2 C_3+D_3=y_{12}$$
$$x_1 A+B=B_1 \quad , \quad x_1 B_1+C=C_2 \quad , \quad x_1 C_2+D=D_3 \quad , \quad x_1 D_3+E=y_1$$

e si avrà la funzione $y=Ax^4+Bx^3+\text{ec.}$, che pei 5 valori di x riceve i valori $y_1 \; \ldots , \; y_5$. Si potrebbero ordinare in molte altre maniere le funzioni interpolari e sempre si giungerebbe alla stessa funzione y .

30. Per applicare l' interpolazione alla ricerca delle radici di una qualsivoglia equazione sembrerebbe opportuno di fare due supposizioni $x=x_1 \;\; x=x_2$, e da esse dedurre un valor approssimato $x=x_3$, poscia colla combinazione di tutte tre le posizioni dedurne un quarto valore x_4 , e così in seguito, avvertendo di spingere i calcoli a sempre maggior approssimazione quanto più si va avvicinandosi al valore ricercato; nulladimeno credo più comodo di fare invece un certo numero di supposizioni, sulle quali distribuite in ordine di grandezza eseguire poi l' interpolazione. Serva di esempio l' equazione

$$x^{\sqrt{2}}-x+0,125=0 \;\; ;$$

sarà opportuno scegliere come incognito il $\log x$; prendiamo da prima $\log x=-0,7$ il che dà al primo membro il valore $0,02782$, poscia tenteremo $\log x=-0,2$, $-0,5$, $-0,4$, $-0,3$; moltiplicheremo questi valori per -10, acciocchè le funzioni interpolari non s'ingrandiscano, il che non sarebbe di alcun vantaggio, e vi sottreremo 4 acciocchè le radici cadano vicine al valor nullo di $t=-10\log x-4$; ecco il calcolo delle funzioni interpolari

$\log x$		y_1	y_{12}	y_{123}	y_{1234}	y_{12345}
—0,7	$t_1 = 3$	2782				
			1128			
				158		
—0,5	$t_2 = 1$	526			—61	
			653			6
				404		
—0,4	$t_3 = 0$	— 127			—92	
			—156			
				679		
—0,3	$t_4 = -1$	29				
			—1513			
—0,2	$t_5 = -2$	1542				

prenderemo i valori di t nell' ordine t_3 t_4 t_2 t_5 e le corrispondenti funzioni interpolari disposte nel seguente modo

t_3	y_3	0	6—80+398+328—127
t_4	y_{34}	—1	6—86+484—156
t_2	y_{234}	1	6—80+404
$t_5 y_{12345} y_{2345}$		—2	6—92

e fatto il calcolo del basso all' alto otterremo i coefficienti

	,0006—,080+3,98+32,8—127		6— 80+398+328—127
3′	,0006—,078+3,75+44,1+ 5	—1	6— 86+484—156+ 29
	—,08 +3,5 +55		6— 92+576—732
	—1″ ,03 +5,5 —		6— 98+674
			6—104
		04″	+,07 —7,0 + 1

dai quali colla solita operazione avremo i valori approssimati

$$t = 0{,}29 \quad , \quad -0{,}96 \quad , \quad \log x = -0{,}429 \quad , \quad -0{,}304$$

31. *Approssimazione lineare.* Oltre l' interpolazione fondata sopra parecchie false posizioni è utilissima specialmente per le ulteriori approssimazioni, l'approssimazione lineare ossia Newtoniana appoggiata non al calcolo differenziale, il quale riuscirebbe quasi sempre troppo laborioso, bensì a due false posizioni vicinissime, nel che molto giovano le tavole numeriche, che presentano le differenze tra i valori successivi, differenze che tengono luogo dei differenziali. — Prendiamo per esempio a rettificare il valore di $\log x = -0{,}429$ trovato col mezzo dell' interpolazione per una delle radici dell' equazione trascendente

$$x^{\sqrt{x}} - x + 0{,}125 = 0 \quad .$$

Oltre dedurre da quel logaritmo il numero corrispondente $x = 0{,}372391 \cdot 7$

osserveremo che tra il logaritmo di 0,37234 e quello di 0,37244 vi è la differenza 116·6 , la quale moltiplicata per $\sqrt{2}$ dà nel $\sqrt{2}\log x$ la differenza 164·9 a cui corrisponde nel numero 0,2473 la differenza 94·0 : l'errore 47·1 diviso per la corrispondente differenza 6·0 darà la quantità 785· che dee togliersi dal supposto x ; così si ottiene la seconda posizione 0,371606·7 che poi si corregge in 0,371620

logaritmi	differenze	numeri	differenze
		0,125	
$\log x = -0{,}429$	116·6	−0,372391·7	−100·0
$\sqrt{2}\log x = -0{,}606697{\cdot}6$	164·9	0,247344·6	940
	Errore	−47·1	: −60 = 785·
−0,429916·5	116·9	−0,371606·7	−100·0
−0,607993·7	165·3	0,246607·5	93·9
	Errore	8	: −61 = −13·1

$$x = 0{,}371606{\cdot}7 + 13{\cdot}1$$

In simil modo si trova l'altra radice (§ 30) $x = 0{,}496411$.

32. Per adoperare l'approssimazione lineare nel risolvere le equazioni trinomie sono particolarmente comode le tavole dei logaritmi additivi del Leonelli conosciuti sotto il nome del Gauss; ecco il metodo che io esposi nella nota IV della mia memoria del 1846 (§ 60, *bc*). Si dia all'equazione la forma $1+a=c$ dove a e c sieno funzioni monomie dell'incognita x , i loro logaritmi A C deggiono corrispondersi nella tavola del Gauss; perciò preso ad arbitrio il $A=\log a$ se ne dedurrà il valore di x , e quindi quello di $\log c$, la cui differenza dal corrispondente C sarà l'errore, che si dividerà per la differenza corrispondente alla differenza 0,001 nell' A , e si otterrà la correzione da farsi ad A . — Facciamone l'applicazione alla predetta

$$1+8x^{\sqrt{2}}=8x \quad ,$$

nella quale la presenza di due radici molto vicine rende lenta l'approssimazione; osserviamo che quando $A=\log a=\log 8+\sqrt{2}\log x$ cresce di 0,001 , $\log c=\log 8+\log x$ cresce di 0,00071 ; se cominciamo con $A=0{,}00309$ il corrispondente $C=0{,}30257$ ha la differenza 50 ; si ha poi $\sqrt{2}\log x=A-\log 8=-0{,}9$, $\log x=-0{,}63640$, $\log c=\log 8+\log x=0{,}26669$,

e si trova in A l'errore —171 . Così la seconda posizione fu $A=0,17309$; scorgendo che il secondo errore —111 era dello stesso segno del primo (dipende ciò dal diminuirsi delle differenze (50—71) (60—71)) presi per seconda correzione —170 , il che peraltro fece oltrepassare una radice, avendosi trovato l' errore +75 , che per ragione opposta alla precedente ridussi a +70 ; con altre due posizioni ottenni

$$A=0,29509 \ , \ \log x = \log c - \log 8 = -0,42992 \ .$$

A	C	$\log c$	Errore	Errore di A
0,00309	0,30257	0,26669	3588 : (50—71)	=—171
0,17309	0,39614	0,38390	1224 : (60— 71)	=—111
0,34309	0,50561	0,50711	—150 : (69— 71)	= 75
0,27309	0,45870	0,45761	109 : (65— 71)	=— 18
0,29309	0,47184	0,47176	8 : (67— 71)	=— 2
0,29509	0,47317	0,47317		

L'altra radice dev'essere al di là di $A=0,370$, che dà la differenza (71—71) nulla ; cominciando con $A=0,44309$

A	C	$\log c$	errore	errore di A
0,44309	0,57679	0,57782	—103 : (74—71)	=—34
0,47709	0,60204	0,60186	+ 18 : (75—71)	= 4,5
0,47249	0,59859	0,59861	— 2 : (75—71)	=— 0,5
0,47299	0,59896	0,59896		

si trova $\log x = -0,30413$; operando con 5 decimali non può aversi maggior approssimazione.

33. Finalmente all' interpolazione ed all' uso dell' approssimazione lineare mediante le differenze date dalle tavole numeriche aggiungo il metodo che consiste nello scegliere alquanti termini più influenti (§ 23) che costituiscano una equazione algebrica, ed adoperare gli altri termini a rettificare l' ultimo termine dell' equazione: ciò è specialmente comodo quando si tratta di trovare il più piccolo valore che dà ad una serie infinita un dato valore (problema che più laboriosamente si risolverebbe mediante il regresso delle serie). Così nella mia Nota IV (§ 50, *bc*) per risolvere la

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.4} - \frac{x^3}{1.4.9} + \text{ecc.} = 0$$

coi cinque primi termini formai l' equazione di 4.° grado

$$x^4-16x^3+144x^2-576x+576=0$$

e andai successivamente modificando il valore della x in guisa che il secondo membro anzichè 0 sia $\frac{x^5}{25}-\frac{x^6}{25.36}+$ ecc. In simil modo proposta l'equazione trascendente

$$(1)\qquad 32(4-x)\,\mathrm{lgb}(4-x)-32\,\mathrm{lgb}\,100=0$$

io operai come se essa fosse

$$(2)\qquad x^3+4x^2-76{,}361420x+30{,}080232=0$$

correggendone l' ultimo termine in guisa di uguagliare la (2) alla (1).

34. Nelle opere che trattano questi argomenti io trovai esempii molto più laboriosamente risolti, niuno che richiedesse metodi differenti dagli accennati. Coll' approssimazione lineare risolsi (§ 60, *bc*, n.[i] 47, 49, 51, 55, 56, 58) la

$$4^{\frac{1}{x}\log x}=\log x \quad \text{dedotta dalle} \quad x^y-5=y^x-4=0 \;,$$

e le

$$4^x+5^x=10 \;,\; e^x=2x+5 \;,\; \sqrt[3]{28+x}-\sqrt[4]{46-x}+x=0 \;,$$

$$x=\mathrm{tg}\,x \;,\; (4-3x^2)\,\mathrm{sen}\,x=4x\cos x \;;$$

mediante l' interpolazione risolsi (ivi n.[i] 63, 65) le due equazioni simultanee

$$xy^2+(x^2+7)7-x^2+x=4y^2-3xy-x^2+5x=0 \;,$$

e le

$$y^3-4xy+2x^2-x^3=(x-1)y^2+x^3=0 \;;$$

per le due

$$x^4+y^4-300=x^3+y^3-80=0$$

io trovai opportuno (ivi n.° 67) di giungere coll' eliminazione alla

$$z^{\frac{4}{3}}+(80-z)^{\frac{4}{3}}=300 \;,$$

che risolsi alla maniera delle equazioni trinomie mediante l' approssimazione lineare adoperando la tavola dei logaritmi addittivi.

35. *Riassunto.* Proposta da risolvere un' equazione se essa abbia i coefficienti commensurabili, si potrà tentare se per caso sia facilmente riducibile ad altre di grado inferiore; a tal uopo moltiplicati da prima i coefficienti per una opportuna progressione geometrica, in guisa che il coefficiente del primo termine diventi l' unità, e quello del secondo sia multiplo del grado, si libererà l' equazione dal secondo termine, e ciò mediante la solita operazione (§ 3); dopo

ciò si renderà palese se l'equazione possa abbassarsi di grado ponendo $x^r = y$, oppure se si possa estrarre alcuna radice, come avviene per esempio della

$$x^6 + 6x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 2 = 0$$

che ci dà $$x^2 + 3x - 2 = \sqrt{18x^2 - 12x + 2} \quad ,$$

e della $$x^6 - 6x^4 + 24x^3 - 24x^2 + 18x - 11 = 0 \quad , \text{ da cui}$$

$$x^2 - 3 = \sqrt[3]{-24x^3 + 36x^2 - 18x + 3} \doteq -\sqrt[3]{3}\,(2x - 1) \quad .$$

Si potrà tentare anche la sostituzione

$$x = y + \frac{p}{y}$$

che talvolta serve ad abbassare il grado, così, per esempio, la

$$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 2dx^5 + 50x^4 + 10dx^3 + 25x^2 + 10dx + e = 0$$

ponendo $$x = y - \frac{1}{y} \quad , \quad y^5 = z \quad \text{diventa}$$

$$z^2 - \frac{1}{z^2} + 2d\left(z - \frac{1}{z}\right) + e - 2 = 0$$

la quale facendo

$$z - \frac{1}{z} = t$$

si abbassa ulteriormente a

$$t^2 + 2dt + e = 0 \quad .$$

Questa ultima sostituzione $$z + \frac{p}{z} = t$$

serve ad abbassare della metà il grado di tutte le equazioni *convertibili*, i cui coefficienti divisi per 1 , p , p^2 , p^3 ... sono euritmicamente intorno al termine medio a due a due uguali, oppure eguali in valore ed alternativamente opposti di segno od eguali anche di segno. Se l' equazione è di grado dispari si libera previamente del fattore $(x \mp 1)$ (§ 60, *bu*, n.° 29). — Quando l' equazione non si possa abbassare di grado, ed essa non sia di grado molto elevato, oppure se di grado anche elevatissimo, contenga quasi tutti i termini spettanti a quel grado, niun metodo sarà preferibile alla *estrazione delle radici dell' equazione* (§ 2), sicchè non solo io riguardo come affatto inopportune al calcolo numerico le formule (trigonometriche o no) per la risoluzione delle equazioni del 3.° o del 4.° grado, ma anche quelle per le equazioni del secondo.

36. Data un'equazione di grado molto elevato e mancante di parecchi termini, si potrà determinare ciascuna radice col metodo del Weddle in fattori-decimali (§ 21) oppure col mezzo dei logaritmi (§ 24). Se apparisca che alcuni termini sono molto più influenti degli altri, si potranno adoperare le successive sostituzioni (§ 23, 33) dei valori approssimati, che si trovano di mano in mano, oppure si risolverà un'equazione, il cui ultimo termine dovrà modificarsi mediante i termini da prima non considerati. Se l'equaziune sia trinomia, sarà molto comoda l'approssimazione lineare (§ 31) adoperando i logaritmi addittivi (§ 32). — Finalmente qualunque sia l'equazione o algebrica di grado molto elevato o trascendente, oppure anche si tratti di due equazioni a due incognite, si potrà adoperare il metodo d'interpolazione (§ 29), ed il valore trovato si rettificherà coll'approssimazione lineare (§ 31).

37. Serve ad abbassare il grado delle equazioni la conoscenza dei *fattori razionali*, che per avventura esse possono avere; così se i coefficienti sono commensurabili, sarà opportuno moltiplicarli per una progressione geometrica in guisa che le radici razionali, se vi sieno, divengano intere, ed allora esse si troveranno nello stesso tempo che si cercheranno tutte le altre. (Quantunque nella mia memoria del 1846 avessi esposto dettagliatamente il più acconcio modo di trovare i fattori razionali, pure, alcuno, cui quella memoria servì di guida, credette di ritenere le antiche regole per tentare successivamente i divisori dell'ultimo termine con particolare disposizione di calcolo, senza badare che la prima riga delle solite *tabelle* serviva benissimo allo scopo; ciò è voler ricalcare le strade lunghe quando fu trovata la breve, del che è prova anche dare le vecchie regole per determinare i confini, tra cui stanno comprese le radici, o risolvere un'equazione di 4.° grado senza badare che essa sia derivata di 2.° grado, ecc.) Nel § 81 della precitata memoria ho mostrato come si trovano le radici intere quando i coefficienti dell'equazione sono grandissimi. — Sarebbe fatica quasi sempre inutile cercare se una equazione abbia radici eguali, ma se risolvendola si trovino tali radici si potrà abbassarne il grado mediante le note formule.

38. *Costruzione grafica delle radici.* Il processo (§ 3) per la determinazione del valore del primo membro di un'equazione algebrica si può facilmente ridurre a costruzione grafica. Proposta l'equazione

$$(1) \qquad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

si tirino presso i lembi del foglio di carta due rette parallele **y** **h** , sulla prima si prendano le lunghezze

$$(2) \quad BA \simeq a \;,\; CB \simeq b \;,\; DC \simeq c \;,\; ED \simeq d \;,$$

(nel che ben s' intende che dee tenersi conto dei segni dei coefficienti a , b , ... secondo i precetti del metodo delle equipollenze). Sia I un punto posto a distanza infinita (potrà essere quello che appartiene a tutte le rette perpendicolari alle **y** **h**), dopo ciò su ciascuna retta **m** parallela alle **y** **h** si determini il punto indicato dalla formula

(3) M coinc. A**I**h**B**m**I**h**C**m**I**h**D**m

(che facilmente si estende ad un' equazione di qualsivoglia grado), la curva *parabolica* dei punti M taglierà sulla retta EI i valori delle cercate radici dell' equazione; la porzione della EI compresa tra le **y** **h** rappresentando l' unità di lunghezza. Il significato della formula (3) è quello da me spiegato nella memoria sugli allineamenti (Vol. VIII, pag. 162); cioè dal punto A si conduce una retta al punto I che è a distanza infinita (vale a dire si tira una retta perpendicolare alle **y** **h**) fino ad incontrare la retta **h** ; dal punto d' intersezione si tira una retta al punto B , la quale tagli la **m** (in un punto la cui distanza dalla retta condotta per C perpendicolarmente alla **h** , cioè dalla retta CI , sarà $=ax+b$ essendo 1 ed x le distanze dalla **y** delle **h** ed **m**) dal punto d'intersezione si tiri una retta al punto all'infinito I , la quale incontri la **h** in un punto, che si congiunga con C tagliando così nuovamente la **m** (in un punto la cui distanza dalla retta DI sarà $=(ax+b)x+c)$, e si continui nello stesso modo fino alla fine della formula. È palese che le intersezioni della **h** colle rette ad essa perpendicolari (cioè che vanno al punto all' infinito I) si determinano comodamente mediante il compasso. — Limitando la costruzione all'intervallo tra le rette **y** **h** si troveranno soltanto le radici positive minori dell'unità; in simil modo la curva dei punti M_1 determinati dalla formula

(4) M_1 coinc. E**I**h**D**m**I**h**C**m**I**h**B**m

taglierà sulla retta AI i valori di $\frac{1}{x}$. — Per costruire le radici negative si muterà previamente x in $-x$. Giova apparecchiare l' equazione in modo che i coefficienti non sieno troppo grandi.

Degli immaginarii.

39. Sono già molti anni che colpito dall' idea contraddittoria, cui voleva esprimersi colla frase *quantità immaginaria*, giudicai che essa fosse da togliersi da una scienza, che sempre appoggiossi a rigorosi ragionamenti; fin d' allora cercando di modificare sotto questo punto di vista l'Algebra elementare, vidi che essa poco o nulla perdeva, e che l' impossibilità delle soluzioni era tanto bene indicata dalle equazioni *senza radici* quanto dalle equazioni a radici immaginarie; i teoremi sulle funzioni simmetriche valevano per le equazioni aventi tante radici quant' è il loro grado, e i metodi di trasformazione fondati su quelle funzioni si estendevano, per la natura stessa delle operazioni algebriche, anche alle equazioni aventi un minor numero di radici. La ragione, per cui a mio credere non doveva calcolarsi il segno $\sqrt{-1}$, era il non aver esso alcun significato nella *scienza delle quantità;* ma se in altra scienza esiste un oggetto, il quale abbia proprietà analoghe, a quelle che si volevano attribuire al $\sqrt{-1}$ diventerà possibile e lecito il ragionare intorno ad esso, e vi si potrà applicare quel tal calcolo che competerà al nuovo oggetto: ora la Geometria piana presenta qoesto oggetto; se sopra una retta partendo da un punto di origine si prendano da una parte le quantità positive e dall' opposta le negative, le rette perpendicolari potranno considerarsi come quantità moltiplicate per $\sqrt{-1}$, ed ammessi i principii del metodo delle equipollenze, le potenze del simbolo $\sqrt{-1}$ saranno appunto quali si supponevano nell' Algebra. Così il calcolo degli *immaginarii* diviene legittimo, soltanto esso non appartiene all' Algebra bensì alla Geometria; ma ogni qualvolta giungeremo ad una conseguenza, che più non contenga il simbolo $\sqrt{-1}$, essa sarà una verità algebrica relativa a sole quantità pienamente giustificata, perchè conseguenza di rigorosi ragionamenti relativi alla Geometria piana. Così, per esempio, come colla Geometria senza bisogno di calcolo può dimostrarsi che $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, così pure facendo il prodotto delle due rette espresse da $a+b\text{r}$ $c+d\text{r}$ si dimostrerà il teorema puramente algebrico

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ac+bd)^2 \quad .$$

Propongo agli analisti l' uso del segno r *(ramuno)*, che meglio della lettera i fa spiccare la natura affatto speciale del suo significato.

40. Il problema geometrico, di cui la risoluzione delle equazioni coo immaginarii dà l' espressione, è il seguente: in un piano e riferibilmente a due punti costaoti O H si muova un punto variabile X, oello stesso piano (o se si voglia in altro piano) si muova un punto variabile Y, la cui posizione rispetto ai punti O H dipenda in maniera conosciuta dalla posiziooe di X, si ricerca viceversa la posizione o le posiziooi di X, a cui corrisponde un dato Y. Se

$$OY = (OX)^2 : OH$$

la figura dei punti Y è quella che io dico *duplicata (Atti Ist. Veneto, marzo* 1853, IV, pag. 80), *(Mem. Ist. Veneto* 1860, VIII, pag. 269 § 57) della figura dei punti X; — se X percorre uua retta passante per O, Y descrive un' altra retta; — se X percorre tutto un circolo col centro O, Y compie due giri in altro simil circolo; — se X descrive uua retta, Y genera una parabola col fuco O, che si dice la duplicata della retta; — così pure la duplicata di un circolo è l' inverso-reciproca di un altro circolo, ecc. Se

$$OY \simeq (OX)^2 : OH + b . OX$$

dove la somma geometrica ha il significato stabilito nel metodo delle equipollenze, la figura Y è ancora duplicata della X, ma rispetto a due punti differenti da O H. Se

$$OY \simeq (OX)^3 : (OH)^2$$

la figura Y io la dico *triplicata* della figura X; la triplicata della retta è la reciproco-inversa della parabola, ecc. Se, posto per brevità $OH \simeq 1$, sia

$$OY \simeq A\,(OX)^n + B\,(OX)^{n-1} + \text{ec.}$$

è un teorema forse per la prima volta rigorosamente dimostrato dal Cauchy (Vegg. § 60, *bu,* IV, § 15) che ad una determinata posizione del punto Y corrispondono sempre *n* posizioni del punto X; queste posizioni costituiscono le radici dell' equazione.

41. Nel mio Saggio sull' Algebra degli immaginarii presentato all' Istituto nel 1847 (*Atti,* 8 *agosto* 1847, VI, pag. 459) ma che per le vicende dei tempi fu pubblicato soltanto nel 1852 (*Mem.* IV, pag. 14), io osservai che non tutte le dipendenze tra i due punti X Y erano suscettibili di *derivazione,* cioè che il rapporto in grandezza e direzione di due movimenti infinitesimi dei punti X Y tra loro legati con data legge non sempre era indipendente

dalla direzione di uno di questi movimenti. Quella mia osservazione allora non fu curata, ed anzi si considerò come una sofisticheria il supporre che alle quantità immaginarie non fosse applicabile ciò che valeva per le reali ed era fondamento del calcolo differenziale; essendochè si credeva, e forse alcuni credono tuttora, che dal momento che $\sqrt{-1}$ si disse una quantità, ad essa potesse e dovesse applicarsi tutto quanto si era dimostrato per le quantità (che per contrapposto si gratificarono col nome di *reali*). Partendo da una geometrica rappresentazione degli immaginarii già antica e poco curata, io immaginai nel 1832 (§ 60, *aj*) quello, che dissi metodo delle equipollenze, nel quale esposi quella idea di somma geometrica $(AB+BC \simeq AC)$, che nel 1845 fu ripubblicata dal Saint-Venant (§ 60, *bb*) e nel 1844 e 1856 dal Mobius (§ 60, *ba*) ed è ora generalmente adottata; gli stessi principii condussero il Cauchy (che in più modi aveva tentato di giustificare il calcolo degli immaginarii) a stabilire definitivamente (§ 60, *bj*) che l' unico e vero tipo degli immaginarii si trovi nella Geometria, sicchè ogni calcolo d' immaginarii è un vero calcolo di equipollenze, ed egli allora distinse (§ 60, *bl*) le funzioni suscettibili di derivazione-differenziale, da quelle, il cui differenziale cangia al mutar direzione del differenziale della variabile indipendente, ed alle prime diede il nome di funzioni *monogene;* io avrei preferito dire che la OY è *funzione* della OX nel solo caso che il rapporto dei due movimenti infinitesimi $YY':XX'$ sia determinato, e nel caso opposto dire che le due figure dei punti X Y sono *dipendenti*, ma non funzioni l' una dell' altra. — L' Algebra elementare presenta al metodo delle equipollenze una sola funzione, cioè l' esponenziale (§ 60, *bu*, IV, pag. 253); la sua funzione inversa (logaritmo) dà infiniti punti per un solo punto della variabile X, giacchè la retta che ad esso mette capo può supporsi avere infinite inclinazioni differenti per un numero intero di rotazioni: di qui la prima idea di funzioni periodiche, che nell'Algebra si presentano nelle funzioni inverse delle circolari.

42. L' uso e la comodità mi fanno estendere il nome di *quantità* anche agli *immaginarii*, che possono considerarsi come *quantità geometriche*, mentre le *reali* sono le vere *quantità algebriche*, queste le indicheremo con lettere minuscole. Nella mia prima memoria (§ 60, *bc*) diedi un metodo che credo nuovo per la determinazione delle radici immaginarie delle equazioni a coefficienti reali, esso fu poi imitato dallo Spitzer (§ 60, *bm*): nel saggio (§ 60, *bu*) e nell' altra memoria (§ 60, *cj*) trattai della risoluzione delle equazioni a coefficienti

immaginarii; al che ora aggiungerò alcuna cosa. — L' estrazione delle radici dell' unità possono ridursi ad un calcolo sopra sole quantità reali; così la

$$(1)\qquad X^{2r}+1=0$$

è *convertibile* (§ 35), sicchè posto $X+\frac{1}{X}=y$ si ottiene la equazione

$$(2)\qquad y^{r}-ry^{r-2}+\frac{r(r-3)}{2}y^{r-4}-\frac{r(r-4)(r-5)}{2\,.\,3}y^{r-6}+\text{ec.}=0$$

che ha tutte le radici reali, se r è dispari essa ha una radice nulla, in ogni caso si abbassa di grado, e si risolve mediante la quinta operazione aritmetica; basta determinarne la massima radice positiva, poichè da essa y si deducono facilmente tutte le altre che sono

$$(3)\qquad y^{2}-2\ ,\ y^{3}-3y\ ,\ y^{4}-4y^{2}+\frac{4.1}{2}\ ,\ y^{5}-5y^{3}+\frac{5.2}{2}y\ ,\ \text{ecc.}$$

Similmente la

$$(4)\qquad X^{2r+1}=1$$

si riduce alla

$$(5)\qquad y^{r}+y^{r-1}-(r-1)y^{r-2}-(r-2)y^{r-3}+$$
$$+\frac{(r-2)(r-3)}{2}y^{r-4}+\frac{(r-3)(r-4)}{2}y^{r-5}-\text{ecc.}=0\quad,$$

che ha essa pure tutte le radici reali, le quali si possono ricavare da una di esse mediante le relazioni (3).

43. ***Equazioni binomie.*** Se la quantità di cui dee estrarsi la radice sia reale, la risoluzione dell' equazione binomia

$$X^{n}=a$$

può ancora ottenersi mediante due operazioni aritmetiche, cioè $\sqrt[n]{a}$ e quella al § 42. Che se il secondo membro sia immaginario

$$(2)\qquad X^{n}=A=a+\alpha\surd$$

bisognerà da prima ridurlo ad avere la *grandezza* $=1$, cioè calcolare

$$\frac{A}{\text{gr}A}=\frac{a+\alpha\surd}{\sqrt{a^{2}+\alpha^{2}}}=c+s\surd\quad,$$

dopo di che la (2) diventerà

$$(3)\qquad (x+\sqrt{x^{2}-1})^{n}=c+s\surd$$

da cui si ricava

$$(2x)^n - n(2x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2x)^{n-4} - \text{ec.} = 2c \quad ,$$

equazione che se n è pari si abbassa al grado $n:2$. Così nel calcolo degli immaginarii sono utili quelle formule che riducono la risoluzione delle equazioni a semplici estrazioni di radice di immagiuarii, le quali sono rese ancora più facili mediante il sussidio delle tavole trigonometriche.

44. *Due espressioni degli immaginarii.* Un immaginario oltre che sotto la forma $a+\alpha\sqrt{\ }$, separando cioè la parte reale da quella puramente immaginaria, può scriversi così

$$z\varepsilon^u$$

dove z è la *grandezza* (sempre positiva) ed u è *l' inclinazione* espressa in parte di raggio (la ε tien di luogo $e^{\sqrt{\ }}$), sono molto meno opportune le denominazioni di *modulo* ed *argomento.* Si potrà anche scrivere

$$10^{l\sqrt{\ }\lambda} \quad \text{o più comodamente} \quad \text{Nl}\,(l;\lambda)$$

dove l è il logaritmo tabulare della grandezza dell' immaginario, e λ ne è l' inclinazione espressa in parti decimali dell' angolo retto, oppure in gradi minuti e secondi se i Matematici vogliano continuare a dar l' esempio di rifiutare un' utile riforma perchè contraria all' abitudine. È palese che sotto la seconda forma riesce facilissima la moltiplicazione, divisione ed estrazione di radice degli immaginarii; per la somma poi di due immaginarii si tratta di trovare il terzo lato di un triangolo, di cui si couoscono due lati e l' angolo intercetto, ed io indicai (§ 60, *bu*, pag. 283, § 33) come metodo più comodo quello di procedere per tentativi coll' approssimazione lineare. Si può anche profittare dei logaritmi addittivi del Leonelli, ma credo miglior consiglio passare dai logaritmi ai numeri e poi viceversa, e ciò mediane le

$$a+\alpha\sqrt{\ } = \text{Nl}(l;\lambda) \ , \ a = \text{Nl}(l).\cos\lambda \ , \ \alpha = \text{Nl}(l)\text{sen}\lambda \ , \ \lambda = \text{Atg}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

Così, per esempio, se si voglia eseguire la somma

$$\text{Nl}\,(0{,}5180\,;\,0{,}9471) + \text{Nl}\,(0{,}7790\,;\,0{,}7802)$$

si troverà nelle tavole

$$\text{lcos}\,0{,}9471 = 8{,}9191 \ , \ \text{lsen}\,0{,}9471 = 9{,}9985 \ ,$$
$$\text{lcos}\,0{,}7802 = 9{,}5295 \ , \ \text{lsen}\,0{,}7802 = 9{,}9736$$

che sommati coi 0,5180 0,7790 danno

9,4371 0,5165 0,3085 0,7526

e ripassando ai numeri si hanno

$$0{,}2736+3{,}2850\,\gamma+2{,}0347+5{,}6570\,\gamma=2{,}3083+8{,}9420\,\gamma$$

poi $\log 8{,}942-\log 2{,}308=0{,}9514-0{,}3633=\lg 0{,}8392$

e la somma cercata è

$$\mathrm{Nl}(0{,}9654\ ;\ 0{,}8392)\quad .$$

45. *Criterii per conoscere la posizione delle radici.* Prima di vedere come si determinino approssimatamente gli immaginarii è necessario parlare dei criterii per riconoscere dove esistano le radici, giacchè nessuno dei criterii, che valgono per le radici reali può estendersi alle immaginarie, le quali non sono come quelle disposte su una retta; sicchè nè il cangiamento di segno (§ 4) mostra la presenza di una radice, nè le radici dell' equazione derivata servono (§ 14) a separare le radici immaginarie della proposta equazione.

46. *Metodo degli indici.* A tre riprese (§ 60, *bc*, *bu*, *cj*, III, pag. 173, IV, pag. 266, VI, pag. 375) ho esposta l' importantissima teoria degli *indici* immaginata dal Cauchy, qui darò per la via più spedita quella parte che può esser veramente utile nella risoluzione delle equazioni. Se f φ sono funzioni reali di una variabile t, che riceva successivamente tutti i valori (intendasi sempre reali) da a a b, e se per ciascun valore della t, che rende $f=0$ si conti $+1$ ogni qualvolta nel predetto continuo procedimento della t da a a b vi sia nei segni di f φ la *perdita* di una variazione; — e si conti -1 se nei segni delle f φ da prima a dopo del valore che rende $f=0$ vi sia l' *acquisto* di una variazione; — finalmente nulla si conti se f φ presentino e prima e dopo una variazione di segno oppure una permanenza; — la somma

$$\mathrm{Ind}\,(f\,,\,\varphi)\,\{t=a\,,\ldots.\,b\}$$

di tutti questi $+1$ -1 dicesi l'*indice* corrispondente all' intervallo da a fino a b .

47. *Teorema dello Sturm.* Quando le f φ sono funzioni razionali-intere della t per calcolare l' $\mathrm{Ind}\,(f\,,\varphi)$ si possono trovare mediante l' operazione del massimo comun divisore le funzioni

$$(1)\qquad f\,,\,\varphi\,\ldots..\,\psi\,,\,\omega$$

tali che nell' intervallo, di cui si tratta, l' ultima ω conservi sempre lo stesso segno, ed ogni qualvolta una delle $\varphi\,,\,\ldots.\,\psi$ si annulla, quella che la precede e quella che la segue abbiano segni opposti, e quindi due successive non can-

gino mai insieme di segno; dopo ciò l' $\mathrm{Ind}\,(f, \varphi)$ può determinarsi sostituendo nelle funzioni (1) prima $t = a$ poscia $t = b$, e contando quante variazioni di segno si *perdono* o si *acquistano* dalla prima alla seconda serie (Veggasi § 59). In ciò consiste il teorema dello Sturm, giacchè se φ e la derivata $\mathrm{D}_t f$ della f, $\mathrm{Ind}\,(f, \mathrm{D}f)$ è la somma di tanti $+1$, o di tanti -1, secondo che $b > a$, o $b < a$, quante sono le radici (le multiple contate per semplici) comprese nell' intervallo da a a b.

48. In pratica riescirà molto meno laborioso trovare approssimatamente le radici della $f = 0$ e sostituitele nella φ determinare direttamente (§ 46) il valore di $\mathrm{Ind}\,(f, \varphi)$. Può anche tornar comodo (diminuendo il pericolo di sbagliare) trovare approssimatamente le radici di ambedue le $f = 0$, $\varphi = 0$, e calcolare i due

$$\mathrm{Ind}\,(f, \varphi) \quad , \quad \mathrm{Ind}\,(\varphi, f)$$

il secondo dei quali è la somma dei $+1$ -1 secondo le variazioni che si perdono o si acquistano per effetto delle radici della $\varphi = 0$. Se le f φ cangiano di segno soltanto coll' annullarsi, e riprendono per $t = b$ gli stessi segni che avevano quando $t = a$, oppure per $t = b$ ambedue abbiano segni opposti a quelli spettanti a $t = a$, è facile riconoscere che si ha la formula di verificazione

$$\mathrm{Ind}\,(f, \varphi) + \mathrm{Ind}\,(\varphi, f) = 0$$

49. *Applicazione alle radici immaginarie* dell' equazione algebrica

$$F(X) = 0 \quad ;$$

se il punto rappresentato da X si faccia percorrere un circuito chiuso, ed al primo membro dell' equazione si dia la forma

$$f + \varphi \sqrt{} = 0$$

dove f φ sono funzioni reali della t, dal cui variare dipende il moto nel circuito, si dimostra (§ 60, *cj*, VI, pag. 377, § 40) che

$$\mathrm{Ind}\,(\varphi, f) = -\,\mathrm{Ind}\,(f, \varphi)$$

è il doppio del numero delle radici che cadono dentro del circuito. In ciò si presuppone che se le $\sqrt{}$ positive si prendono a *sinistra* delle quantità reali crescenti, anche il circuito sia percorso girando sulla sinistra; vale a dire se le quantità reali positive si prendono verso l' Est, e le $\sqrt{}$ si prendono verso il Nord, il circuito si percorrerà nel senso Est-Nord-Ovest-Sud.

50. Nella risoluzione delle equazioni trovo più utile il seguente teorema: *I due indici eguali ma di opposti segni*

$$\mathrm{Ind}(f, \varphi) \quad , \quad \mathrm{Ind}(\varphi, f)$$

presi nella supposizione che il punto indicato dalla incognita X *percorra l' estensione di una retta infinita, danno il primo l' eccesso del numero delle radici che stanno a destra di quella retta sul numero delle radici che stanno a sinistra, ed il secondo l' eccesso delle radici a sinistra su quelle a destra.* Così in particolare, se al punto X si faccia percorrere l' asse delle quantità reali da $-\infty$ a $+\infty$ sarà $\mathrm{Ind}(\varphi, f)$ l' eccesso del numero delle radici colla parte immaginaria $\xi\surd$ positiva su quelle che contengono ξ negativa (le radici reali, per cui $\xi=0$, non contano); e se al punto X si faccia perrorrere l' asse delle $\surd$ da $-\infty\surd$ a $+\infty\surd$ sarà $\mathrm{Ind}(f, \varphi)$ l' eccesso del numero delle radici colla parte reale x positiva su quelle con x negativa. — Si ponga ben attenzione che se una delle funzioni intere f φ fosse di grado inferiore all' altra di un numero dispari di unità, bisognerebbe aggiungere ad essa il termine t^n moltiplicato per un coefficiente infinitesimo, e quindi considerare insieme colle altre radici anche la ∞ .

51. *Risoluzione delle equazioni;* per le equazioni di 3.° e di 4.° grado possono tornar utili le note formule di risoluzione, mediante le quali queste si riducono a sole estrazioni di radici, le quali sono operazioni più facili delle risoluzioni di equazioni, specialmente profittando delle tavole trigonometriche; nulladimeno credo che nel 4.° grado le sostituzioni riescano complicate. Per le equazioni trinomie veggasi il metodo riportato nella Nota IV della mem. § 60 *bc*. Due metodi di approssimazione si presentano (§ 19) anche per gl' immaginarii, cioè o per successiva aggiunta di parti o per fattori: gli indici ci daranno in un caso e nell' altro il criterio necessario per conoscere la posizione delle radici e trovarle tutte. Con un esempio renderò più semplice il metodo già pubblicato nel 1852.

52. Sia proposta l' equazione

$$(1) \quad X^4-(10-4\surd)X^3+(20-21\surd)X^2+(24+2\surd X)-60+19\surd=0 \; ,$$

se da prima vogliamo sapere quante radici $X=x+\xi\surd$ abbiano la ξ positiva e quante negativa, esaminando le due funzioni

$$f=x^4-10x^3+20x^2+24x-60 \quad , \quad \varphi=4x^3-21x^2+2x+19$$

si scorge che le radici della $f=0$ disposte in ordine crescente sono all' in-

circa $-1{,}6$, 2 , 3 , 7 e che i corrispondenti valori della φ hanno i segni qui sotto indicati

(2)	$1-10^{*}+20+24-60$	$4-21+2^{*}+19$
$-1{,}6$	$1-11{,}6+38{,}6-37{,}8\pm 0$	$4-27+45-$
2	$1-8+4+32\mp 0$	$4-13-24-$
3	$1-7-1+21\pm 0$	$4-9-25-$
7	$1-3-1+17\mp 0$	$4+7+51+$

Ai valori 0 della f diedi doppii segni, il superiore corrisponde ad un valore pochissimo minore e l' inferiore ad un valore pochissimo maggiore della radice; ommisi i valori della φ bastando notarne il segno. Ora esaminando i segni corrispondenti alla prima radice veggo che le f φ prima della radice hanno i segni $+$ $-$ e dopo i $-$ $-$, sicchè vi è la *perdita* di una variazione, e quindi si ha l' indice $+1$; invece presso alla seconda radice i segni $-$ $-$ delle f φ si cangiano nei $+$ $-$, quindi vi è l' *acquisto* di una variazione e l' indice -1 ; presso la terza i segni $+$ $-$ si cangiano nei $-$ $-$ vi è *perdita* di variazione e l' indice $+1$, e lo stesso presso la quarta; raccogliendo questi indici parziali si ha

$$\mathrm{Ind}(f,\varphi)=1-1+1+1=2 \quad ,$$

perciò (§ 50) *due* è l' eccesso del numero delle radici che stanno a destra su quelle che stanno a sinistra dell' asse delle x , cioè l' equazione di 4.° grado ha tre radici con ξ negativo ed una con ξ positivo.

53. Noi preferiremo tagliare lo spazio con rette parallele alle $\xi\surd$, e cercare fra quali di queste rette cadano le radici; cominciamo col supporre $x=0$, e consideriamo la retta da $-\infty\surd$ a $+\infty\surd$; ponendo $X=\xi\surd$ la (1) si decompone in $f+\varphi\surd$ essendo

$$f=\xi^4+4\xi^3-20\xi^2-2\xi-60 \quad , \quad \varphi=10\xi^3+21\xi^2+24\xi+19 \quad .$$

Giova stabilirsi una regola per formare questi coefficienti mediante quelli scritti superiormente; a tal fine agli ultimi termini -60 $+19$ si conservarono i posti e i segni, a quelli $+20$ -21 che li precedono di due posti si cangiarono i segni, e così in seguito alternativamente; il penultimo termine $+2$ della seconda *tabella* si trasporta nella prima e gli si cangia il segno; quello 4

che lo precede di due posti si trasporta ma conserva il segno, e così in seguito se altri ve ne fossero; il termine penultimo $+24$ della prima tabella si trasporta nella seconda tabella e gli si conserva il segno, e quelli che lo precedono di 2, di 4, di 6 ec. posti si trasportano ed alternativamente si cangia e si conserva il segnn. Si sono segnati con un * i termini che cangiano e di posto e di segno. Così si ottengono i coefficienti

(3)	1+4—20—2*—60	10*+21+24 +19
—7	1—3+ 1—9 ± 0	10 —49+367—
3	1+7+ 1+1 ∓ 0	10 +51+ +

$$\operatorname{Ind}(f,\varphi)=1+1=2 \ .$$

Le due radici della $f=0$ sono approssimatamente -7 $+3$ e colle loro sostituzioni nella φ mostrano che a destra della retta $\xi=0$, cioè dalla parte delle x positive esistono 2 radici di più che a sinistra, quindi 3 valori di $X=x+\xi\sqrt{\ }$ hanno x positiva ed uno ha x negativa. Ponendo $x=1+x'$ le trasformate dedotte dai coefficienti delle (2) si ottengono mediante il solito calcolo

	1—10*+20+24—60	4—21+ 2*+19
1	1— 9 +11+35—25	4—17—15 + 4
	1— 8 + 3+38	4—13—28
	1— 7 — 4	4— 9
	1— 6	

per sapere se siasi oltrepassata alcuna radice si formano cogli indicati trasporti e cangiamenti di segno i coefficienti

	1+4+4+28*—25	6*+ 9+ 38+4
—5	1—1+9—17 ± 0	6 —21+143—
1	1+5+9+37 ∓ 0	6 +15+ +

$$\operatorname{Ind}(f,\varphi)=1+1=2 \ .$$

Le due radici della $f=0$, che sono approssimatamente -5 e 1 die-

dero l'indice uguale al precedente, dunque non abbiamo oltrepassata alcuna radice. — Aggiungendo ad x un'altra unità si trova $\mathrm{Ind}\,(f, \varphi) = 1 - 1 = 0$, perciò tanti sono i valori di x superiori a 2 quanti gli inferiori; prenderemo adunque il valore intermedio $x = 1{,}5$, che ci darà

	1—60*— 400+38000—250000	40—900+28000*+ 40000
5′	1—55 — 675+34625— 76875	40—700—31500 —117500
	1—50 — 925+30000	40—500—34000
	1—45 —1150	40—300
	1—40	

dopo ciò faremo i soliti trasporti dei coefficienti, e vedremo che è inutile calcolare l'indice, giacchè le $f = 0$ $\varphi = 0$ hanno una radice poco differente da 0,3, sicchè siamo vicini ad uno dei valori di X

	1+40+1150+34000*—76875	40*+300+30000—117500
3′y	1+43+1279+37837 +36636	40 +420+31260— 23720
	1+46+1417+42088	40 +540+32880
	1+49+1564	40 +660
	1+52	
—3″y	,052+15,48+4162,4+24149	,040 +6,48+3268,6—33526
	,051+15,33+4116,4*	,040 +6,36+3249,5
	,051+15,18	,040*+6,24

dopo la cifra 3′ adoperammo anche la —3″ acciocchè gli ultimi termini 24149 —33526 riuscissero approssimatamente proporzionali ai penultimi +3249,5 —4116,4 che nelle tabelle seguenti divengono i loro divisori; per trovare le cifre della parte reale x si dà ai coefficienti la loro disposizione primitiva, cioè si conserva agli ultimi le loro posizioni e segni, si trasportano i penultimi da una tabella all'altra mutando il segno a quello coll' *, per ogni altro coefficiente si segue la regola di quello che gli è lontano di due posti, peraltro con opposizione nel segno

	1''—,040*—15,18+3249,5+24149	,051—6,24—4116,4*—33526
—8''	1''—,041 —14,85+3368,3— 2797	,051—6,65—4063,2 — 1020
	1''—,042 —14,51+3484,4	,051—7,06—4006,7
	1''—,042 —14,18	,051—7,47
2'''	—0,14 +348,2 — 2101	—,07 —400,8 — 1822
	— ,14 +347,9	—,07 —400,9*

anche qui si continuò il calcolo finchè gli ultimi coefficienti —2101 —1822 furono all'incirca proporzionali ai penultimi +400,9 +347,9 che mediante i soliti cangiamenti divengono i loro divisori nelle seguenti tabelle, che danno tre nuove cifre della parte $\xi\gamma$

	+0,14+400,9*—2101	+0,07+347,9—1822
5'''γ	0,14+401,6 — 93	+0,07+348,3— 81
	0,14+402,3	0,07+348,6
2''γ	+40, 2*— 13	+34, 9— 11
3'γ	+4,0 — 1	+3,5 — 1

raccogliendo le cifre trovate si ha la radice

$$X=1,5\bar{8}200+0,3\bar{3}523\gamma=1,42200+0,27523\gamma \quad .$$

Abbiamo superiormente veduto che per $x=0$ e per $x=1$ è $\mathrm{Ind}(f,\varphi)=2$, per x poco maggiore del trovato valore 1,422 sarà $\mathrm{Ind}(f,\varphi)=0$: passiamo alla trasformata in $(X—4)$

	1—10*+20+24—60	4—21+ 2*—19
4	1— 6 — 4+ 8—28	4— 5—18 —53
	1— 2 —12—40	4+11+26*
	1+ 2 — 4	4+27
	1+ 6*	

Calcoliamone l' indice, e questa volta teniamo conto (§ 48) tanto delle radici -1 , 2 della $f=0$, quanto di quelle della $\varphi=0$, per la quale bisogna avvertire che essendo essa del 3.° grado conviene (§ 52) aggiungervi il termine $\frac{1}{\infty}\xi^4$, sicchè oltre la radice, che è all'incirca -3 , dobbiamo considerare anche la $\xi=\infty$

	1+4+ 4—26*—28	—6*—27—40—53
—3	1+1+ 1—29 +	—6 — 9—13 ± 0
—1	1+3+ 1—27 ± 0	—6 —21—29—
2	1+6+16+ 6 ∓ 0	— — — —
∞	+	∓ 0

così abbiamo gli

$$\mathrm{Ind}(f,\varphi)=1-1=0 \quad , \quad \mathrm{Ind}(\varphi,f)=-1+1=0$$

i quali ci avvertono che nessuna radice cade tra $x=1,422$ ed $x=4$; procediamo adunque ad $x=5$

	1+6* — 4—40—28	4+27+26*—53
1	1+7 + 3—37—65	4+31+57 + 4
	1+8 +11—26	4+35+92*
	1+9 +20	4+39
	1+10*	

tenendo conto anche questa volta tanto delle radici della $f=0$, che sono all' incirca -4 , $-3,14$ $-0,91$ $+5$ quanto di quelle della $\varphi=0$ (aggiuntovi il termine $\frac{1}{\infty}\xi^4$) che sono -3 , $-1,05$, $+0,1$, $+\infty$. si potrebbero determinare i segni delle f φ senza fare i calcoli seguenti, che servono soltanto a verificare le trovate radici approssimate

	1+4 —20 —92* —65	—10*—39 —26 +4
—4	1+0 —20 —12 ± 0	—10 + 1 —30 +
—3,14	1+0,86—22,7—20,7 ∓ 0	+
—3	1+1 —23 —23 +	—10 — 9 + 1 ±0
—1,05	1+2,95—23 —68 +	—10 —28,5+3,2 ∓0
—0,91	1+3,09—22,8—71,3 ± 0	—10 —29,9+1,2 +
+0,1	1+4,1 —20 —94 —	—10 —40 —30 ±0
5	1+9 +25 + 33 ∓ 0	— — — —
∞	+	∓ 0

così abbiamo gli

$$\mathrm{Ind}(f,\varphi)=-1+1-1-1=-2\ ,\quad \mathrm{Ind}(\varphi,f)=-1+1+1+1=2$$

ognuno dei quali mostra (§ 50) che a sinistra di $x=5$ vi è un eccesso di 2 radici sopra quelle che sono a destra; dunque una radice cade tra $x=4$ ed $x=5$ ed una corrisponde ad $x>5$. L' osservare che le $f=0$ $\varphi=0$ hanno ambedue una radice poco differente da -3 ed una poco differente da -1 fa conoscere che ormai possiamo determinare due radici della proposta equazione; per la prima calcoleremo

	1+4—20—92*—65	—10*—39—26+4
—3√	1+1—23—23 + 4	—10 — 9+ 1+1
	1—2—17+28	—10 +21—62
	1—5— 2	—10 +51
	1—8	

e continuando troveremo

$$X=5,05772-3,01264\sqrt{\ }\quad ,$$

così pure

$$X=4,94867-0,93425\sqrt{\ }\quad .$$

La trasformata in $(X+2)$ conduce alle due equazioni in ξ $f=0$, $\varphi=0$ e le radici approssimate della prima danno

	1+ 4—104—134*+68	18*+ 45—208—101
—12	1— 8— 8— 38 ± 0	18 —171+ —
—2	1+ 2—108+ 82 ∓ 0	18 + 9—226+
1	1+ 5— 99—$\hat{2}$33 ± 0	18 + 63—145—
9	1+13+ 13— 17 ∓ 0	18 +207+ +

$$\mathrm{Ind}(f,\varphi)=1+1+1+1=4$$

quindi tutte quattro le radici della proposta equazione cadono a destra di $x=-2$, si trova finalmente

$$X=-1{,}42840-0{,}32834\gamma\ .$$

54. *Metodo per fattori.* L' altro metodo di approssimazione (§ 51), che è analogo a quello del Weddle (§ 21), è particolarmente opportuno per le equazioni mancanti di molti termini: sostituendo

$$X=AX_1$$

dove A sia un immaginario non molto discosto da una radice, l' equazione in X_1 avrà una radice poco differente dall' unità, la quale si determinerà approssimatamente mediante i due ultimi termini della trasformata in (X_1-1) , poi si continuerà ponendo $X_1=A_1X_2$, ecc. Per non cercare inutilmente le radici dove non sono si osservi che posto $X=x$ se il primo membro dell' equazione sia $f+\varphi\gamma$, essendo f φ funzioni reali della x , l' $\mathrm{Ind}(f,\varphi)$ da $x=-\infty$ ad $x=\infty$ dà (§ 50) l' eccesso del numero delle radici, che stanno a destra dell' asse delle x (cioè dalla parte delle ξ negative) su quelle che stanno a sinistra, sicchè se l' analogo indice per $X_1=x_1$ sia differente dal precedente noi saremo certi qualche radice cadere nell'intervallo angolare tra la retta d' inclinazione nulla e quella che ha l' inclinazione stessa di A . Viceversa due radici rimarrebbero dissimulate se nel girare dell' asse delle x_1 intorno all' origine delle coordinate se ne perdesse una dalla parte delle x_1 positive ed una si acquistasse dalla parte delle x_1 negative (o viceversa), questa circostanza peraltro sarà facilmente conosciuta mediante le ricerche delle radici delle $f=0$ $\varphi=0$, che servono a determinare l'indice;

ed alla peggio, sapendosi il numero delle radici essere uguale al grado della equazione, si potranno sempre cercare le mancanti suddividendo gli intervalli già esplorati.

55. Sia, per *esempio*, proposta l' equazione

$$X^{7}+(3+2\surd)X^{3}-5-7\surd=0$$

facilmente si scorge una radice esser poco differente dall' unità; la trasformata in $(X-1)$ si ottiene ponendo $X=1$ tanto nell' equazione quanto nelle sue derivate prima, seconda, ecc. (§ 21), sicchè essa è

$$\ldots+(30+6\surd)(X-1)^{2}+(16+6\surd)(X-1)-1-5\surd=0 \quad ;$$

adoperando soltanto i due oltimi termini la divisione dà

$$X-1=0{,}16+0{,}25\surd \quad ,$$

perciò nell' equazione proposta, che è

$$\begin{array}{r|r|r} & 16-10 & 6^{\bullet}\ -50 \\ \hline 1' & 16+\ 6 & 6\ \ -44 \\ 2'\surd & -\ 6-\ 6 & 16\ -12 \\ 5''\surd & -{,}6-\ 9 & 1{,}6-\ 4 \\ 6'' & 1{,}6+\ 1 & 0{,}6+\ 0 \end{array}$$

$$X^{7}+X^{3}\text{NI}(0{,}556971\cdot7\,;0{,}374334''1)-5-7\surd=0$$

essendo all' incirca $1{,}16+0{,}25\surd=\text{NI}(0{,}074\,;0{,}1353')$ porremo

$$X=X_{1}\text{NI}(0{,}074\,;0{,}1353)$$

ed avremo

$$X_{1}^{7}\text{NI}(0{,}518\,;0{,}9471)+X_{1}^{3}\text{NI}(0{,}779\,;0{,}7802)-5-7\surd=0$$

i cui coefficienti ridotti (§ 44) alla forma $a+\alpha\surd$, poscia moltiplicati per 7 e per 3 onde ottenere la derivata, danno i due ultimi termini della trasformata e colla divisione

$$\begin{array}{ll} +0{,}274+3{,}28\surd & 1{,}92+22{,}96\surd \\ +2{,}03\ \ +5{,}67\surd & 6{,}09+17{,}01\surd \\ -5\ \ \ \ -7\ \ \ \surd & \\ \hline -2{,}70\ \ +1{,}95\surd\ : & 8{,}01+39{,}97\surd \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|r} & 8{,}0-270 & 40{,}0^{\bullet}+195 \\ \hline -7''\surd & -40{,}+\ 10 & 8\ \ +139 \\ -3'' & 8\ -\ 14 & 40\ \ +\ 19 \\ -4''' & 0{,}8-\ 17 & 4\ \ +\ \ 3 \\ -4'''\surd & -4\ \ -\ \ 1 & 0{,}8\ \ +\ \ 0 \end{array}$$

troveremo

$$X_{1}=1-0{,}034-0{,}074\surd=\text{NI}(-0{,}0137\,;-0{,}04867) \quad .$$

Sicchè la seconda posizione sarà

$$X=X_{2}\text{NI}(0{,}0603\,;0{,}0866) \quad ,$$

perciò

$$X_{2}^{7}\text{NI}(0{,}4221\,;0{,}6062)+X_{2}^{3}\text{NI}(0{,}7379\,;0{,}6341)-5-7\surd=0 \quad ,$$

dalla quale si deducono come sopra i due ultimi termini della trasformata in $(X_1 - 1)$

$$\begin{array}{ll} +1{,}5325+2{,}1533\gamma & 10{,}7275+15{,}0731\gamma \\ +2{,}9731+4{,}5899\gamma & 8{,}9193+13{,}7697\gamma \\ -5 \quad -7 \quad \gamma & \\ \hline -0{,}4944-0{,}2568\gamma \quad : & 19{,}6468+28{,}8428\gamma \end{array}$$

e colla divisione si ha approssimatamente

$$X_1 = 1+0{,}01408-0{,}00755\gamma = \mathrm{NI}(0{,}006073\,;\,-0{,}004731'') \quad .$$

Quindi porremo

$$X = X_1 \mathrm{NI}(0{,}066373\,;\,0{,}081869'')$$

e troveremo la radice

$$X = \mathrm{NI}(0{,}066253{\cdot}5\,;\,0{,}082105''8) = 1{,}15513+0{,}149811\gamma \quad .$$

56. Ora cerchiamo la posizione delle altre sei radici; ponendo $X = x$ si hanno le

$$f = x^7+3x^3-5 \qquad \varphi = 2x^3-7$$

la $f=0$ ha una sola radice, che non ci occorre determinare, bastandoci osservare che essa è minore del valore che annulla φ, sicchè corrispondentemente a tal radice si hanno i segni

$$f \mp 0 \qquad \varphi \; -$$

donque $\qquad \mathrm{Ind}(f,\varphi) = -1 \quad ,$

perciò fra le 7 radici dell'equazione 3 sole sono a destra (cioè una di meno che a sinistra) della retta d'inclinazione zero vale a dire al Sud della retta dall'Ovest all'Est, ossia dalla parte delle ξ negative. Ponendo invece $x = \xi\gamma$ si ha

$$f = 2\xi^3-5 \quad , \quad \varphi = -\xi^7-3\xi^3-7$$

la f, anche aggiungendovi il termine $\frac{1}{\infty}\xi^7$ ha la sola radice $1{,}35$, dalla quale risultano i segni

$$f \mp 0 \qquad \varphi \; - \quad , \text{ e } \quad \mathrm{Ind}(f,\varphi) = -1$$

e 3 sole radici sono a destra della retta d'inclinazione 1, cioè all'Est della retta dal Sud al Nord. Ponendo

$$X = \frac{1+\gamma}{\sqrt{2}} X_0 = X_0 \mathrm{NI}(0\,;\,0{,}5)$$

l' equazione diventa

$$X_0^7\,\mathrm{NI}(0;0,35)+X_0^3\,\mathrm{NI}(0,557;1,874)-5-7\gamma=0 \quad ,$$

che se $X_0=x_0$ si decompone in $f+\varphi\gamma$, essendo

$$f=0,7x_0^7-3,5x_0^3-5 \quad , \quad \varphi=-0,7x_0^7+0,7x_0^3-7$$

la $f=0$ ha una sola radice positiva, la quale dà alla φ , ossia alla $\varphi+f=-2,8x_0^3-12$ un valor negativo, perciò i segni sono

$$f\mp0 \quad , \quad \varphi - \quad , \text{e} \quad \mathrm{ind}(f,\varphi)=-1 \quad ,$$

e quindi tre sole radici cadono a destra anche della retta d' inclinazione $0,5$, cioè al Sud della retta dal Sud-Ovest al Nord-Est. Essendo eguale il numero delle radici a destra delle due rette d' inclinazione 0 e $0,5$, ed avendo già trovato (§ 55) che una radice cade nello spazio angolare tra Est e Nord-Est, necessariamente ne cadrà almeno una nello spazio tra Ovest e Sud-Ovest: con un calcolo d' approssimazione analogo a quello del § 55 essa si trova

$$X=\mathrm{NI}(0,151910;2,466165)=-1,05510-0,94850\gamma \quad .$$

Diamo adesso alla X_0 l' inclinazione $-0,5$ (verso Sud-Est), cioè poniamo $X=\mathrm{NI}(0;-0,5)X_0$, si trova

$$f=0,7x_0^7-0,7x_0^3-5 \quad , \quad \varphi=0,7x_0^7-3,5x_0^3-7 \quad ;$$

la $\varphi=0$ non ha che una radice positiva, la quale rende positiva la $f-\varphi=2,8x_0^3+2$ e quindi anche la f , perciò

$$f+ \quad , \quad \varphi\mp0 \quad , \quad \mathrm{ind}(f,\varphi)=-\mathrm{ind}(\varphi,f)=-1 \quad ,$$

quindi tre sole radici cadono a destra della retta da Nord-Ovest verso Sud-Est. Superiormente abbiamo trovato che alla retta d' inclinazione $+1$ (verso Nord) corrisponde $\mathrm{ind}(f,\varphi)=-1$, perciò alla retta d' inclinazione -1 (verso Sud) corrisponderà $\mathrm{ind}(f,\varphi)=+1$, ed avendo ora veduto che alla retta d' inclinazione $-0,5$ (verso Sud-Est) corrisponde $\mathrm{ind}(f,\varphi)=-1$ bisognerà necessariamente che almeno una radice cada nello spazio angolare tra Nord e Nord-Ovest, il quale è a destra della retta d' inclinazione -1 ed a sinistra di quella d' inclinazione $-0,5$.

57. Per determinare questa radice dimezziamo lo spazio tra Sud e Sud-Ovest ponendo

$$X=\mathrm{NI}(0;-0,75)X_0 \quad ,$$

e la $X^7+X^3\mathrm{NI}(0,557;0,374)-5-7\gamma=0$ diventerà

$$X_0^7 \mathrm{Nl}(0\,;2{,}75)+X_0^3\mathrm{Nl}(0{,}557\,;2{,}124)-5-7\surd=f+\varphi\surd=0$$

$$f=-x_0^7\mathrm{Nl}9{,}583-x_0^3\mathrm{Nl}0{,}549-\mathrm{Nl}0{,}699 \quad ,$$

$$\varphi=-x_0^7\mathrm{Nl}9{,}966-x_0^3\mathrm{Nl}9{,}842-\mathrm{Nl}0{,}845$$

la $f=0$ non ha che una radice negativa, la quale si trova col metodo spiegato al § 32 ponendo

$$A=4\log t-0.966 \quad , \quad c=t^3\mathrm{Nl}0{,}150$$

e cominciando con $t=-x_0=1$ la tavola del Gauss dà

A	C	log c	Errore	Errore di A
—0,966	0,045	0,150	—,105 : (,10+,75)	=—,120
—0,846	0,058	0,060	—,002 : (,13+,75)	=—,002 ;

perciò $t=\mathrm{Nl}0{,}030$, ed $x_0=-1{,}07$, che sostituita nella

$$\varphi-f\mathrm{Nl}0{,}383=x_0^3(\mathrm{Nl}0{,}942-\mathrm{Nl}9{,}842)+\mathrm{Nl}(1{,}082-\mathrm{Nl}0{,}845)=$$

$=8{,}05x_0^3+5{,}08$ la rende negativa, e si ha

$$f \pm 0 \quad , \quad \varphi - \quad , \text{e} \quad \mathrm{Ind}\,(f,\varphi)=1 \quad ,$$

quindi la radice deve cadere tra l' inclinazione $-0{,}5$ e la $-0{,}75$. Poniamo perciò

$$X=\mathrm{Nl}\,(0\,;-0{,}7)X_0$$

$$f=x_0^7\mathrm{Nl}9{,}194-x_0^3\mathrm{Nl}0{,}515-\mathrm{Nl}0{,}699 \quad ,$$

$$\varphi=-x_0^7\mathrm{Nl}9{,}995-x_0^3\mathrm{Nl}0{,}177-\mathrm{Nl}0{,}845 \quad ;$$

cerchiamo questa volta le radici di ambedue le $f=0$, $\varphi=0$;
la prima, scritta $x_0^3\mathrm{Nl}9{,}816+1=x_0^7\mathrm{Nl}8{,}495$, dà

A	C	log c	Errore	Errore di A
1,016	1,056	1,295	—239 : (91—233)	= ,168
848	906	,903	3 : (88—233)	=—,002 ;
850				

quindi $x_0=\mathrm{Nl}(0{,}345)=2{,}213$

e scritta $(-x_0)^7\mathrm{Nl}8{,}495+1=(-x_0)^3\mathrm{Nl}9{,}816$ dà

A	C	log c	Errore	Errore di A
0,595	0,693	0,716	—23 : (80—43	=—,062
0,658			da cui	$x_0=-\mathrm{Nl}0{,}309=-2{,}038$
—0,875	0,054	0,086	—32 : (12—43)	= ,104
—0,980			da cui	$x_0=-\mathrm{Nl}0{,}075=-1{,}19$

e la φ scritta $(-x_0)^4$NI9,818+1=$-(x_0)^{-1}$NI0,668
0,138 0,375 0,428 —53 : (58+75)=—,040
0,178 da cui x_0=—NI0,090=—1,23 ;

ponendo queste quattro radici in ordine di grandezza si presentano i seguenti segni

	—2	—1,23	—1,19	+2
f	± 0	$+$	± 0	∓ 0
φ	$+$	± 0	$-$	$-$,

sicchè Ind(f,φ)=1+1—1=1=—Ind(φ,f)=1 .

Si scorge che una radice è poco discosta da 1,2NI(0;—0,7)=NI(0,08;1,3) e col metodo stesso del § 55 si trova

X=NI(0,08833;1,30654)=—0,56757+1,08620γ .

58. Dimezzando anche l'intervallo tra Nord e Nord-Est, cioè considerando la retta d'inclinazione 0,75 si trova Ind(f,φ)=1 , cioè alla sua destra deggiono trovarsi 4 radici, mentre alla destra tanto della retta che va al Nord-Est quanto di quella che va al Nord ve ne sono (§ 56) soltanto tre, perciò una radice deve cadere nello spazio angolare tra Nord-Est e Nord-Nord-Est ed una tra Sud e Sud-Sud-Ovest, ed infatti esse si trovano

NI(0,18937 ; 0,62750)=0,85418+1,28930γ ,
NI(0,09345 ; 2,86001)=—0,27050—1,21021γ .

— Siccome alla direzione Est-Sud-Est, ossia alla retta d'inclinazione —0,25 corrisponde Ind(f,φ)=—1 , così rimane ancora dissimulato l'altro pajo di radici; per iscoprirlo si potrebbero prendere su ogni direzione le radici della f=0 , e quelle della φ=0 , e così costruire due curve, le cui intersezioni indicherebbero le posizioni delle radici. Del resto se tenteremo l'inclinazione —0,4 troveremo

f=$-x_0^4$NI9,490+x_0^2NI9,988—5 , φ=x_0^3NI9,978—x_0^1NI0,541—7

la f=0 ha una sola radice negativa e la φ=0 una sola positiva, dunque

f ± 0 , —
Ind(f,φ)=1 ,
φ — , ∓ 0

e siccome alle inclinazioni 0 , e —0,5 corrisponde Ind(f,φ)=—1 , così noi siamo certi che una radice cade tra l'inclinazione —0,4 e la —0,5 e l'altra tra l'inclinazione 1,6 e la 2 , esse si trovano

$$\text{N}|(0,18785\,;\,3,55204)=1,17512-0,99715\sqrt{}$$
$$\text{N}|(0,15745\,;\,1,7108)=-1,29125+0,63057\sqrt{}\quad .$$

59. Nel precedeute esempio le f φ essendo trinomie l'*indice si calcola più speditamente* senza determinare le radici delle $f=0$ $\varphi=0$; esso si trova, come dicemmo al § 47, sostituendo nelle f , φ , e $\omega=-f+m\varphi$ i valori $-\infty\,+\infty$ e la radice dell' equazione binomia $\omega=0$. Così relativamente all'inclinazione $-0,7$ essendo (§ 57)

$$=x^3\,\text{N}|9,194-x^3\text{N}|0,515-\text{N}|0,699\ ,\ \varphi=-x^3\text{N}|9,995-x^3\text{N}|0,177-\text{N}|0,845$$
$$\omega=-f-\varphi\text{N}|9,199=x^3(\text{N}|0,515+\text{N}|9,376)+\text{N}|0,699+\text{N}|0,044=$$
$$=x^3\text{N}|0,545+\text{N}|0,786\quad ;$$

la radice $x=-\text{N}|0,080$ della $\omega=0$ sostituita nelle f , φ dà ad esse i segni $+$. $-$; sicchè sostituendo nelle f , φ , ω prima $-\infty$ ed x , poscia x e $+\infty$ si hanno i segni

	f	φ	ω
$-\infty$	$-$	$+$	$-$
x	$+$	$-$	$-$

	f	φ	ω
x	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$-$	$+$

e quindi (§ 47)

$$\text{Ind}(f,\varphi)=(2-1)+(2-2)=1\quad .$$

60. Aggiungo l' elenco delle memorie citate e di altre che trattano della risoluzione approssimata delle equazioni, dei criterii per conoscere le radici, ecc.

a) Canovai, Riflessioni sul metodo del Lagrange. *Mem. Accad. di Siena*, 1794, VII.

b) Leonelli, Logaritmi addittivi, metodo dei fattori decimali, ecc. *Supplement logarith. Bordeaux* 1801. *Giorn. Soc. Incoragg. Milano, sett.* 1809. *Bull. Férusc. juill.* 1824, II, n.° 18. Citato al § 20.

c) Franchini, Risoluzione delle equazioni di un grado qualunque mediante le serie. *Mem. Accad. Torino* 1801, VI.

c') Caluso, Risoluz. col mezzo della riga e del compasso, *ivi*.

d) Ruffini, Metodo per la risoluz. numerica coronato dalla Soc. Italiana, 1804. *Mem. di Modena* 1822, I, pag. 366.

e) Budan, *Nouv. méthode pour la résol. des équat. numér. Paris* 1807. Cit. ai §§ 6, 11.

f) Lagrange, *Traité de la résol. des équat. numériques. Paris* 1808. Cit. §§ 17, 26.

f') Bidone, Metodo grafico per conoscere il numero di soluzioni delle equazioni trascendenti. *M. Acad. Torino* 1809, XX, p. 35.

g) Ruffini, Nuovo metodo di estrarre le radici numeriche. *Mem. Soc. Ital.* 1813, XVI.

h) Multedo, Serie finite a radicali continui per la risol. delle equaz. *Mem. Acad. Scienze di Genova*, 1814, III.

i) Cauchy, Determinazione del numero e dei segni delle radici reali. *Séance de l' Institut*, 6 *déc.* 1813. *Soc. philomath.* 1814, pag. 95. *Dict. des découvertes*, VI, p. 205.

j) Corancez, Costruz. geometrica delle radici delle eq. mediante le evolventi. *J. Ec. polytechn.* 1815, X, *xvij*, pag. 212 . . . 262.

k) Legendre, Nuovo metodo per le equazioni omali. *Mém. Institut*, 1816, I, pag. *x*. *Théorie des nombres* 1830, II, pag. 395, Cit. ai §§ 17, 26.

l) Horner, Met. per la risoluz. delle eq. anche trascendenti. *Trans. Philos. London*, 1819, Cit. § 2.

m) Vène, Limiti delle radici e loro minima differenza pei sistemi di due equaz. a due incognite. *Mém. prix de l' Acad. de Bruxelles* 1824. *Bull. Féruss. oct.* 1825 n.° 167, *avril* 1827, VII, n.° 173.

n) N. N., Criterii per l' esistenza dei valori critici. *Ann. Gerg.* XV, XVI, *Bull. Fér. déc.* 1824, II, n.° 300, *sept.* 1826, VI, n.° 96. Cit. al § 12.

n') Fourier, Sulle radici immaginarie e valori critici delle equazioni trascendenti. *M. Institut*, 1824, VII, p. 605. *Traité de la chaleur etc. Mém. Institut*, 1827, X, p. 119.

o) Poletti, Metodo per le radici immag. ed esame degli altri metodi. *M. Accad. Torino* 1826, XXX, 1831, XXXV.

p) Olivier, Indizii sul numero delle radici reali; uso dell' interpolazione. *J. Crelle*, 1826, I, pag 223, 1827, II, p. 214, Cit. §§ 12, 17,

q) Grunert, Dim. del teorema Harriot-Cartesio. *J. Crelle*, 1827, II, pag. 335. Cit. § 6.

r) Fourier, Radici e valori critici indicati dalla perdita di variazioni anche per le equazioni trascendenti. *Bull. Fér. juill.* 1827, VIII, n.° 8. Cit. § 6.

s) Dupré, Criterio per valor critico, è un coroll. di noto teorema. *Ann. Gerg.* XVIII, *Bull. Fér.* 1827, n.° 206. Cit. § 12.

t) Cauchy, Risoluz. delle eq. numer. e teoria dell' eliminazione. *Mém. Sav. étrangers*, 1827, I. *Exerc. de Math.* 1829, IV. *Bull. Fér.* 1829, XI, pag. 238, *août* 1838, XIV, p. 152, *sept.* 1831, XVI, n.° 106.

u) Gauss, Dimostr. del teor. Harriot-Cartesio. *J. Crelle*, 1838, III, pag 1. *Ann. Gergonne*, 1828. *Bull. Féruss. juin sept.* X, n.° 238. Cit. § 6.

v) Dandelin, Adopera le derivate ed il teor. De Gua. *N. Mém. Acad. Bruxelles*, III. *Bull. Féruss. mai* 1828, IX, n.° 201. Cit. § 17.

x) Ferroni, Dim. di due teor. enunciati dal Budan. *Mem. Soc. Ital.* 1828, XX.

y) Sturm, Dimostr. del suo teor. anche per le eq. trascendenti. *Bull. Fér.* 1829, *juin*, XI, n.i 271 272. *Mém. Sav. étrang.* 1835, VI, pag. 273 . . . 318.

z) Budan, Risoluz. generale, teor. Budan-Fourier. *Bull. Féruss. oct.* 1829, XII, n.° 191. Cit. § 6.

z') Poisson, Sulle radici delle equazioni trascendenti ed obbiezioni ai teoremi del Fourier. *Bull. Féruss. mars* 1829, XI, n.° 64. *Mém. Institut*, 1830, IX. *Bull. Fér. avril* 1831, XV, n.° 97.

aa) Jacobi, Risoluz. mediante serie infinite. *J. Crelle*, 1830, VI, p. 257. Cit. § 17.

ab) Galois, Risoluz. delle eq. omali, ecc. *Bull. Férr. juin* 1830, n.° 216. Cit. § 17.

ac) Fourier, *Analyse des équations determinées. Paris* 1831. Cit. §§ 6, 11, 17, 27.

ad) Cauchy, Num. delle radici delle eq. algebr. o trascend., teoria degli indici. *Bull. Fér. sept.* 1831, n.° 106. *Comptes R*, *mai* 1837, IV, pag. 672.

ae) Stern, Sopra un teor. del Fourier, sul metodo per serie ricorrenti. Applicaz. della teoria delle funzioni continue. *J. Crelle*, 1832, IX, pag. 305, 1833, XI, pag. 33, 142, 277, 311, 407. Cit. § 17.

af) Gräffe, Metodo per serie ricorrenti. *J. Crelle*, 1832, X, n.° 22, pag. 288. Cit. § 17.

ag) Jacobi, Osservazioni sulla risolubilità delle eq. algebriche. *J. Crelle*, 1834, XIII, pag. 430, 352. *N. Ann. Terq.* 1848, VII, pag. 22.

ah) Hill, Met. per estrarre rapid. la radice terza, *J. Crelle*, 1834, XI, p. 262. *N. Ann. Terq.* 1848, VII, p. 459.

ai) Vincent, Sur la résolution des éq. numériques. *Soc. de Lille*, 1834. Cit. § 17.

aj) Bellavitis, Saggio di un nuovo metodo di Geom. analit. (calcolo delle equipollenze). *Ann. del R. Lomb.-Veneto*, 1835, V, pag. 244 ... 259. Cit. § 41.

ak) Sturm e Liouville, Dim. del teor. del Cauchy sugli *indici*. *J. Liouv. août*, 1836, I, pag. 278... 308. *Comptes R.*, *mai* 1837, IV, p, 720, V, p. 6.

al) Vincent, Sulla risoluz. delle eq. colle fraz. continue. *J. Liouv. oct.* 1836, I, pag. 341 ... 372 1838, III, p. 135 ... 243. Cit. § 17.

am) Libri, Dice d' aver espresso sotto forma finita algebr. il num. delle radici reali ed i loro valori fino ad una data approssim. *Comptes R.,janv.* 1837, IV, pag. 168. Cit. § 17.

an) Raabe, Osserv. sul met. del Lagrange. *J. Crelle*, 1837, XVII, p. 94 ... 96, 1839, XX, pag. 57 ... 59.

ao) Cauchy, Calcolo degli indici, espress. delle radici in serie converg., met. detto generale e sempliciss. per la risoluz. delle eq. anche trascendenti. *Comptes R.*, *fév.* 1837, IV, p. 216, *mars* IV, p. 362, *mai* IV, p. 612, 773 ... 783, 805 ... 821, *août* V, p. 301, *sept.* V, p. 357 ... 365. *J. Ec. polytechn. xxv*, 1837, XV, p. 176 ... 229. *M. Soc. Ital.* 1839, XXII. Cit. § 17.

ap) Vincent, Quantità minore della minima differenza delle radici. *J. Liouv. mai* 1838, III, pag. 235 ... 243.

aq) L' Accad. di Berlino propone premio per la determinazione delle radici immaginarie.

ar) Mainardi, Uso delle serie ricorrenti anche per le radici immaginarie. *Ann. R. Lomb. Veneto*, 1839, p. 273 e 1840, X, p. 113. Cit. § 17.

as) Cauchy, Risoluz. numerica delle eq. anche trascendenti. *Comptes R., oct.* 1840, XI, p. 639. *nov.* p. 829. Cit. § 17.

as') Cauchy, Risoluzione numerica delle equazioni algebriche o trascendenti col mezzo delle funzioni interpolari; separazione delle radici ecc. *Comptes rendus* 23 *nov.* 1840, XI, p. 829. 14 *déc.* 1840, XI, 993, 21 *juin* 1841, XII, p. 1133.

at) Stern, Risol. delle eq. trasc., regola del Fourier, metodi di Bernoulli Cauchy ecc. *J. Crelle*, 1841, XXII, pag. 1 ... 62. Cit. § 17.

au) Encke, Sposiz. del metodo del Gräffe. *J. Crelle*, 1841, XXII, p. 193 ... 248. *N. A. Terq* 1854, XIII, pag. 81. Cit. § 17.

av) Christie, Estensione del criterio del Budan alle radici immag., e nuovo metodo per separare le reali. *The Lond. Phil. Magaz.* 1842, XXI, n.° 136, pag. 96 ... 101. Cit. §§ 6, 11.

ax) Lobatto, *Recherches sur la distribution des racines*, *Paris* 1842. *J. Liouv. août* 1844, IX, p. 295. Cit. § 11.

ay) Young, Criterio per l'esistenza dei valori critici. *The Lond. Ph. Magaz.* 1843, n.° 144, e *dec.* 1843. Cit. § 12.

az) Cauchy, Separaz. delle radici anche senza il teor. dello Sturm. *Comptes R., août* 1843. XVII, p. 370.

ba) Möbius, Principii elem. del metodo delle equipoll. *J. Crelle*, 1844, XXVIII, pag. 1 ... 9, 1856, LII, pag. 218 ... 228. Cit. § 41.

bb) Saint-Venant, Somma geometrica e prodotto geom. di due rette. *Comptes R. sept.* 1845, XXI, p. 620. Cit. § 41.

bc) Bellavitis, Sul più facile modo per trovare le radici reali, e nuovo met. per le immag. *Mem. Ist. Veneto* 1846, III, pag. 109 ... 223. Cit. § 9, 17, 23, 32, 33, 34, 42, 45, 46.

bd) Valtinowsky, Osserv. sulle espressioni delle radici in serie infinite. *J. Crelle*, 1846, XXXIII, p. 164 ... 173. Cit. § 17.

be) Frisiani, Met. d'approssim. per le radici, fraz. continue, serie del Lagrange ec. *Effemer. astronom. Milano* pel 1845 o pel 1846. Cit. § 28.

bf) Sturm, Criterio per l'esist. d'alquanti valori critici. *N. Ann. Terq.* 1846, V, p. 115.

bg) Léon Anne, Sull'appross. Newtoniana. *N. Ann. Terq.* 1846, V, p. 118 ... 121.

bh) Guilmin, Conseguenze del teor. di Cartesio, *ivi*, V, p. 239 ... 244 e pag. 334 ... 339.

bi) Cauchy, Nuovo met. per la risoluz. delle eq.; immaginarii rappresentati da quantità geometriche. *Exerc. d'Analyse*, 1847, IV, pag. 181 ... 187. *Comptes oct.* 1847, XXV, pag. 536, e p. 726. Cit. § 17.

bi') Sul problema del Keplero, veggasi: Delambre, *Mem. Institut*, 1817, II, pag. *xj*. Frisiani *be*). *N. Ann. Terq.* 1848, VII, p. 11. Gasparis, *Comptes rendus*, 16 *févr.* 1857, XLIV, p. 338. Dupain, *N. Ann. Terq.* 1857, XVI, p. 376, 430, 463, XVII, p. 108. Bourgeois, XIX, p. 130.

bj) Cauchy, Vero signif. degli immag., quant. geometriche. *Comptes R. sept.* 1849, XXIX. *Mém. Ac. Sciences*, 1850, XXII, p. 134. Cit. § 41.

bk) Schnuse, *Die Theorie und Auflös. der Gleichungen. Braunschweig*, 1850. Cit. § 6, 18.

bl) Gauss, Teoria delle eq. algebr., rappresentaz. degli immag., radici reali ed immag. delle eq. trinomie. *Abhandl. Wissenschaft Göttingen*, 1850, IV, pag. 3 ... 34. *N. Ann. Terq.* 1851, p. 165 ... 180. Cit. § 17.

bm) Spitzer, Radici reali ed immag. col processo dell'Horner. *Haiding. Abhandl.* 1830, III, p. 147 ... 170, Cit. § 17, 42.

bn) Moth, Meccanismo di calcolo per le radici reali analogo alla divis. abbreviata. *Akad. Wissensch. Wien.* 1850, I, pag. 105 ... 156. Cit. § 17.

bo) Mourgues, Limite superiore a tutte le radici. *N. Ann. Terq.* 1850, IX, p. 108 ... 115. Cit. § 7.

bp) Faà de Bruno, Criterii per valori critici. *J. Liouv.* XV, 1850, pag. 363. Cit. § 12.

bq) Bertolo, Dubbio del Budan sul metodo del Lagrange. *Atti Accad. N. Lincei*, anno IV.

br) Moigno, Metodo d'approssim. del Cauchy. *N. A. Terq.* 1851, X, pag. 14 ... 22. Cit. § 17.

bs) Piobert, Metodi d'approssim. per le eq. trinomie. *N. Ann. Terq.* 1851, X, pag. 198 ... 180. Cit. § 17.

bt) Vincent, Applicaz. del metodo Budan-Fourier, *ivi*, X, p. 275 ... 277. Cit. § 17.

bt') Cauchy, Funz. *monogene* sono quelle che ammettono la derivata. *Comptes R. févr. avril* 1851, XXXII, p. 160, 484, 704. Cit. § 41.

bu) Bellavitis, Saggio sull' Algebra degli immaginarii. *Mem. Istituto Veneto*, 1852, IV, p. 243... 344. Cit. §§ 35, 40, 41, 42, 44, 46.

bv) —— Sui metodi di Spitzer e di Moth. *Atti Ist. Veneto*, 1852, III, pag. 121 . . . 135. Cit. § 17.

bx) Vanson, Gislard, Limite super. delle radici. *N. Ann. Terq.* 1852, XI, pag. 61, 107.

by) Pacinotti, Nuova operaz., estraz. di fattori. *Ann. Università di Pisa*, 1850, 1852. Cit. § 17.

bz) Mainardi, Nuovo calcolo d' approssimaz. *M. Soc. Ital.* 1852, XXV, pag. 1 . . . 33. Cit. § 17.

ca) Bonnet, Radici immag. trovate mediante l' appross. lineare. *N. Ann. Terq.* 1853, XIII, p. 243 . . . 256.

cb) Desbores, Separaz. delle radici, metodo non esatto, *ivi*, 1854, XIV, p. 60 e XVIII, p. 213, 310, 370.

cc) Terquem, Risoluz. delle eq. trascend., radici immag. ,varii metodi. *N. Ann. Terq.* 1855, XIV, pag. 295 . . . 304.

cd) Thereim, Risoluz. delle eq. mediante serie infinite. *J. Crelle*, 1855, IL, pag. 187 . . . 212, Cit. § 17.

ce) Valz, Metodo opposto a quello del Gräffe. *Comptes R. oct.* 1855, XLI, p. 683. Cit. § 17.

cf) Leuenstern, Modo strano per trovar 4 radici. *Ann. Tortol. dec.* 1855, VI, 481.

cg) Housel, Metodo del Cauchy, appross. lineare anche per le eq. trascendenti. *N. Ann. Terq.* 1856, XV, p. 214 . . . 256. Cit. § 17.

ch) Hermite, Met. dello Sturm applicato alle eq. a coeffic. immag. *J. Crelle*, 1856, LII, p. 39..51.

ch') Tchebicheff, Confini in cui è compresa una radice delle eq. in cui l' incognita non ha alcun esponente pari. *N. Ann. Terq.* 1856, XV, p. 387, XVI, p. 326. XVII, p. 331, XIX, p. 95.

ci) Genocchi, Teor. del Budan ed altro sostituendo ai coeffic. delle potenze i coeffic. dei fattoriali. *Ann. Tortol. dec.* 1856; VII, p. 462.

cj) Bellavitis, Sulla risoluz. numerica delle eq. anche transcendenti e radici immagin. *M. Ist. Ven.*, 1857, VI, p. 357. Cit. § 15, 29, 42, 45, 46, 49.

cj') Cauchy, Numero delle radici delle equazioni trascendenti col mezzo dei *compteurs* logaritmici ecc. *Compte rendu*, 16, *fevr.* 1857, XLIV, p. 257.

cl) Follador, Riporta il mio metodo per calcolare le radici immag. *Corso di Matem. superiore. Padova* 1857.

cm) Fergola, *Ricerche sulla risoluz. per serie. Napoli* 1857. Cit § 17.

cn) Dupré, Mel. del Budan perfez. dal Vincent. *Comptes R. oct.* 1857, VL, pag. 585 . . . 587.

co) Bellavitis, Sulla dimostr. dell' impossibilità della risoluz. delle eq. *Atti Istit. Veneto, nov.* IV, pag. 53 . . 61.

cp) Catalan, Criterii per l' esistenza di valori critici. *Compt. R. nov.* 1858, VLII, p. 797 . . . 799. Cit. § 13.

cq) Genocchi, Grado di approssimaz. di una form. data da Berndston per le eq. trinomie. *Ann. Tortol.* 1859, II, pag. 233. Cit. § 17.

cr) Horner J., Espressione delle radici in parti aliquote. *Quort. J. of Mathem. aug.* 1859, III, pag. 251 . . . . 262. Cit. § 27.

cs) Valz, Risoluz. delle eq. specialm. trinomie col mezzo delle serie e dei logaritmi. *Comptes R. nov.* 1859, IL, pag. 750. *Atti Istit. Veneto*, 1860, V, pag. 821. Cit. § 17.

Segue l' indice delle cose principali e degli Autori.

(Letta ai 17 giugno 1860).